

Razonamiento con imprecisión: Lógica Borrosa

Apuntes y Ejercicios

Daniel Manrique Gamo
Profesor Titular de Universidad

María del Carmen Suárez de Figueroa Baonza
Profesora Contratada Doctora

Departamento de Inteligencia Artificial
Universidad Politécnica de Madrid

Este trabajo es fruto del análisis y estudio, estrictamente personales, de los autores.

Los comentarios que se efectúan a lo largo de esta obra constituyen la opinión personal de los autores. Los autores no aceptarán responsabilidades por las eventualidades en que puedan incurrir las personas o entidades que actúen o dejen de actuar como consecuencia de las opiniones, interpretaciones e informaciones contenidas en este documento.

A Gema, Pablo, Samuel, Blanca María Oliva e Isabel.

A los alumnos.

Daniel

A mi marido y mis niños por su apoyo constante.

Mari Carmen

Índice

1. Introducción	5
a. Razonamiento aproximado	6
2. Fundamentos de la lógica borrosa	8
a. Conjuntos borrosos	9
b. Operaciones con conjuntos borrosos	13
c. Extensión cilíndrica	14
d. Funciones t-norma, t-conorma y negación	16
e. Dualidad	21
f. Implicación difusa	22
g. Ejemplos	25
3. Razonamiento en lógica borrosa	27
a. Regla composicional de inferencia	32
b. Motor de inferencia borroso: generalización a n reglas	32
c. Ejemplo	33
d. Proceso de interpretación del resultado	37
4. Controladores borrosos	45
a. Procedimiento general de inferencia en controladores	51
b. Ejemplo de inferencia en controladores	54

1. Introducción

La lógica borrosa, o difusa, se puede considerar una disciplina dentro de la Inteligencia Artificial que permite representar el conocimiento acerca de un dominio y realizar procesos de inferencia o razonamiento. Para ello, proporciona un formalismo o lenguaje formal de representación del conocimiento basado en la lógica y las matemáticas.

La lógica borrosa permite representar matemáticamente conceptos que pertenecen a conjuntos cuyas fronteras no se encuentran nítidamente definidas, sino que éstas son vagas, borrosas o difusas. Así, por ejemplo, se puede establecer, con total seguridad, que una persona que mide 220 cm. pertenece al conjunto de las personas altas. Pero, ¿dónde está la frontera entre las personas consideradas altas y las personas de estatura media?. Se podría establecer en este caso como valor frontera $h = 180$ cm.; de tal forma que las personas cuya estatura sea igual o superior a 180 pertenecen al conjunto de las personas altas. Entonces, ¿una persona que mida 179 cm. no es alta?. No parece que se ajuste a la realidad. De hecho, no existe esa frontera. Cualquier punto que se elija resultará inadecuado en los valores de su entorno. En contraposición con la teoría clásica de conjuntos, donde los elementos del dominio pertenecen o no pertenecen a un conjunto en base a unas reglas que establecen una frontera **nítida**, la pertenencia o no a un conjunto difuso o borroso resulta **vaga o imprecisa** en la frontera.

La figura 1.1 muestra la diferencia existente entre frontera nítida e imprecisa. La figura 1.1 a) muestra la recta real que representa valores de temperaturas corporales (T), medidas en grados centígrados ($^{\circ}\text{C}$). El conjunto de las personas que tienen fiebre se establece mediante la expresión $T \geq 37^{\circ}\text{C}$. Por tanto, este dominio así representado establece una frontera nítida (representada mediante una barra vertical) entre las personas que tienen fiebre y las que no, lo cual, se puede considerar, se ajusta bastante bien a la realidad. La figura 1.1 b) muestra otra recta real que representa valores de altura de personas (h), medida en centímetros. En este caso no existe una frontera nítida (barra vertical) que separe a las personas altas del resto. Por el contrario, existe un tramo de indefinición (vaguedad), en donde la pertenencia o no al conjunto de las personas altas no está clara. Este tramo se establece en el intervalo $h \in (170, 180)$. Por tanto, las personas que miden menos de 170 cm. no son altas, las personas que miden más de 180 cm. sí son consideradas así, mientras que existe una frontera imprecisa de pertenencia en el intervalo (170,180) cm. Efectivamente, en este caso, es razonable pensar que esta forma de representar el conocimiento se ajusta más a la realidad, a la forma que tienen las personas de percibir la realidad. Se da la paradoja, en este caso, de que **la imprecisión es más precisa**. Suponiendo que la frontera nítida establecida para la fiebre en la figura 1.1 a) es correcta, se extrae también la conclusión de que la lógica borrosa no representa ni mejor ni peor el conocimiento que se tiene acerca de un dominio, sino que es un lenguaje formal de representación adicional que puede ser utilizado para la construcción de sistemas inteligentes más ajustados a la realidad. Debe ser una elección del ingeniero del conocimiento, informático o diseñador del sistema inteligente elegir el tipo de representación más adecuado al dominio o problema a resolver.

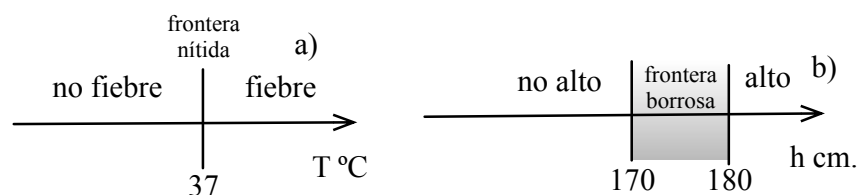


Figura 1.1. Fronteras nítidas e imprecisas.

a. Razonamiento aproximado

El razonamiento aproximado es una capacidad del ser humano por la cual es capaz de obtener conclusiones útiles a partir de conocimiento incompleto, impreciso o con cierto grado de incertidumbre. La lógica tradicional se basa en que las cláusulas, reglas o afirmaciones son ciertas o falsas con carácter absoluto. Por ello, si bien ésta es una forma válida de representación del conocimiento y razonamiento en determinados dominios, la inteligencia artificial emplea modelos matemáticos adicionales capaces de simular la capacidad humana para realizar razonamiento aproximado. Entre ellos, se encuentran la lógica difusa, que proporciona un mecanismo matemático para realizar procesos de razonamiento con **imprecisión**; y las redes bayesianas, o los sistemas MYCIN y Prospector, que permiten simular procesos de razonamiento con **incertidumbre**.

Se considera que el conocimiento es impreciso, borroso o difuso, cuando las fronteras correspondientes a una determinada categoría son vagas. Esto es, hay un cierto número de elementos para los que no se puede asegurar su pertenencia mediante valores dicotómicos: verdadero y falso o, cero y uno; sino que hay grados de pertenencia parcial. Así por ejemplo, para la afirmación “el día es caluroso”, existen ciertos valores de temperatura ambiente para los que no se puede afirmar o rechazar dicha afirmación. Diferente es el conocimiento con incertidumbre. La regla “Si fiebre, entonces gripe” es falsa si no se añade a este conocimiento cierto grado de incertidumbre, por ejemplo, mediante una medida de probabilidad (p). De esta forma, la regla anterior queda como: “Si fiebre, entonces gripe; $p = 0.1$ ”, siendo, en este caso, verdadera¹.

Con el fin de aclarar la diferencia entre imprecisión e incertidumbre, se plantea el siguiente ejemplo: suponga el suceso aleatorio de lanzar un dado al aire, ¿qué número saldrá?. Cualquiera de los seis posibles valores es una afirmación falsa: “saldrá el 6”. Por tanto, es necesario emplear una forma de representar el conocimiento de forma aproximada. Utilizar en este caso la imprecisión, implicaría que se podrían dar situaciones en las que no queda perfectamente determinado qué número sale una vez que el dado ha sido lanzado. Se estaría representando, por ejemplo, la posibilidad de que el dado quedara sobre una de sus aristas. Dado que éste no es el caso y que lo que se desea es representar el conocimiento acerca del futuro (qué número saldrá), es necesario emplear una forma de representar el conocimiento con incertidumbre: “saldrá el 6; $p = 1/6$ ”, lo cual es estadísticamente cierto. Por tanto, se tiene que cada uno de los seis sucesos de variable aleatoria son precisos, pero existe

¹ El valor de probabilidad es inventado, para ilustrar el ejemplo.

incertidumbre acerca del número que saldrá. De hecho, en este caso, el conocimiento que realmente se está representando es la **ignorancia** que se tiene hacia un hecho. Visto así, la ignorancia es conocimiento, o mejor, una forma de simular inteligencia. Efectivamente, tener la capacidad de responder “no lo sé” es una forma de exhibir inteligencia, dado que es mejor que dar una respuesta errónea. El mecanismo que tiene el uso de medidas de probabilidad para representar la ignorancia que se tiene acerca de un hecho es la asignación de los mismos valores de probabilidad a todos los sucesos de la variable aleatoria: equiprobabilidad en todos los sucesos. Así, en el caso del ejemplo del dado, la contestación a la pregunta: “¿qué número saldrá?”; la respuesta también puede ser: “no lo sé”; lo que equivale a asignar un valor de probabilidad de 1/6 a cada uno de los 6 posibles resultados que se pueden obtener.

Las redes bayesianas emplean, con gran éxito, medidas de probabilidad condicionada para representar el conocimiento con incertidumbre. Un inconveniente que puede suscitar esta técnica es la dificultad de diferenciar entre ignorancia total acerca de un hecho, e igual certeza para todos los sucesos de una variable aleatoria. Suponga que se diseña un sistema inteligente para el diagnóstico de enfermedades víricas. Una de tales enfermedades podría ser la gripe, por lo que se declara la variable “gripe” con dos posibles valores (nítidos): “sí” y “no”. Por tanto: $\text{gripe} \in \{\text{sí}, \text{no}\}$. Suponga que para diagnosticar la enfermedad, se lanza una moneda al aire. Si se obtiene cara, la respuesta es que el paciente tiene gripe. Si sale cruz, no la tiene. En este caso, la probabilidad de tener la enfermedad es 0.5, por tanto, $\text{gripe} = \text{“sí”}$; $p = 0.5$ es cierto. También ocurre que $\text{gripe} = \text{“no”}$; $p = 0.5$ es cierto. Evidentemente, dado el sistema de “diagnóstico” empleado, se está representando que se tiene **ignorancia** acerca del hecho de padecer la enfermedad. Suponga ahora la situación en la que un paciente entra en una consulta médica porque tiene sospechas de gripe. El médico entonces hace una exploración y encuentra signos de la enfermedad. Concluye, tras un proceso de inferencia en base a los hallazgos exploratorios, que en el caso concreto de ese paciente, la probabilidad de padecer gripe es del 50%. Se tiene, en este caso, con el mismo valor de probabilidad que anteriormente, **certeza** a favor del hecho de padecer la enfermedad.

Para evitar este problema de diferenciación entre ignorancia e igual certeza ante diferentes sucesos, el sistema inteligente MYCIN [Buchanan, 1984] emplea el concepto de factor de certeza (CF, en inglés). El factor de certeza que se asigna a un hecho o hipótesis toma valores entre -1 y 1: $\text{CF} = [-1, 1]$. Así, dada una hipótesis h , $\text{CF}(h) = -1$ indica que se está totalmente seguro que no h ; $\text{CF}(h) = +1$ indica que se está seguro que se cumple h ; los valores intermedios modelan diferentes grados de certeza a favor (positivos) o en contra (negativos) del hecho o hipótesis. Se reserva, en este caso, el valor cero, $\text{CF}(h) = 0$, para indicar ignorancia acerca de un hecho.

Por tanto, y como conclusión, la representación del conocimiento con imprecisión permite modelar dominios en los que se presentan categorías o conjuntos cuyas fronteras no están claramente definidas. Por su parte, la representación del conocimiento con incertidumbre permite modelar dominios en donde las afirmaciones no son estrictamente ciertas o falsas en todos los casos, aunque los valores que toman las variables son precisos. La incertidumbre permite también representar la ignorancia total acerca de un hecho.

2. Fundamentos de la lógica borrosa

La lógica borrosa proporciona un modelo matemático-lógico para la construcción de sistemas inteligentes que manejan conocimiento con imprecisión. El término sistema inteligente es muy general, y se emplea para hacer referencia a cualquier sistema que desarrolla procesos que se pueden encuadrar dentro del área de la inteligencia artificial. Dentro de los sistemas inteligentes, se encuentran los sistemas basados en el conocimiento, cuya característica principal es la representación explícita del conocimiento mediante un lenguaje formal de representación, que se emplea para llevar a cabo una tarea considerada como *inteligente*: diagnóstico, planificación o toma de decisiones entre otras. La figura 2.1 muestra el esquema general de un sistema basado en el conocimiento, formado por una base de conocimiento y un motor de inferencia. Un sistema basado en el conocimiento recibe como entrada un conjunto de hechos que se cumplen para un caso particular y la pregunta que se formula al sistema en base a los hechos. Se dispara entonces un proceso de inferencia mediante su motor de inferencia, utilizando para ello la base de conocimiento, y se devuelve un resultado o respuesta.

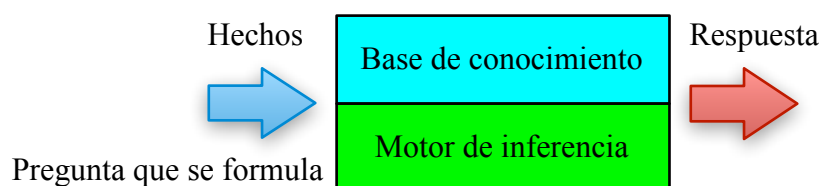


Figura 2.1. Estructura general de un sistema basado en el conocimiento.

La **base de conocimiento** emplea un formalismo de representación declarativa (no algorítmico) de los conceptos de un dominio específico, sus propiedades, relaciones y elementos individuales que puedan aparecer. Existen diferentes formalismos de representación del conocimiento, los cuales, en base a sus características particulares, pueden resultar más adecuados para representar los conocimientos que se manejan en uno o otro dominio específico, como por ejemplo, la incertidumbre o la nitidez. La lógica borrosa, por su parte, proporciona un lenguaje formal de representación del conocimiento con imprecisión.

La lógica borrosa permite la definición de un conjunto de variables que maneja el sistema inteligente: significado, unidades de medida, dominio de valores numérico y dominio de **valores cualitativos** o **etiquetas lingüísticas**. Es precisamente en la definición de este último dominio de valores donde se encuentra la diferencia más significativa de los sistemas inteligentes basados en lógica borrosa. Suponga que se desea manejar y, por tanto, se define la variable T, temperatura ambiente en Madrid, medida en grados centígrados (°C) y cuyo dominio de valores es $T \in [-10, 50]$ °C. Gracias al uso de la lógica borrosa, podemos emplear términos o categorías para definir temperaturas cuyas fronteras no están bien definidas, como por ejemplo: frío, templado, caluroso o alrededor de 40 °C (~40). Por tanto, además del

dominio de valores numérico definido para T, se define también el conjunto de etiquetas lingüísticas o valores cualitativos, cuyos valores numéricos no están claramente definidos: $T=\{\text{frío, templado, caluroso, } \sim 40\}$.

Tomando, por ejemplo, el valor $T = \text{caluroso}$, es fácil darse cuenta que representa una categoría o un conjunto de valores numéricos de temperaturas cuya frontera no se puede establecer en ningún valor concreto. Se podría asegurar que los valores $T \in [30,50]$ pertenecen al conjunto caluroso. Si se acepta que $T = 30^\circ\text{C}$ es una temperatura que se puede considerar como calurosa, entonces no es razonable suponer que $T = 29^\circ\text{C}$ no lo sea. Por tanto, existe una frontera difusa, borrosa o vaga entre los valores de temperatura que se consideran calurosos y los que no. La figura 2.2 representa esta situación.

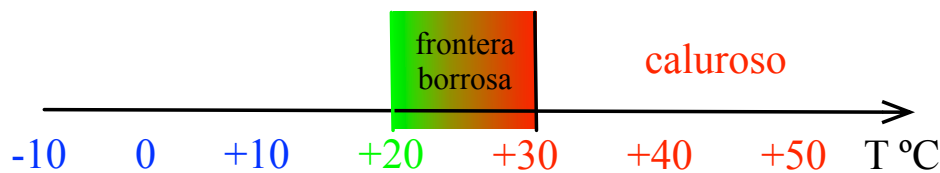


Figura 2.2. El conjunto de valores de temperatura (T) que pertenecen a la etiqueta $T=\text{caluroso}$ tiene una frontera difusa.

La base de conocimiento de un sistema inteligente basado en lógica borrosa incluye un conjunto de reglas de la forma:

$$\text{var}_1 = \text{val}_1 \text{ OPR}_1 \text{ var}_2 = \text{val}_2 \text{ OPR}_2 \dots \text{ OPR}_{n-1} \text{ var}_n = \text{val}_n, \rightarrow \text{var}_0 = \text{val}_0$$

donde $\text{var}_0, \text{var}_1, \dots, \text{var}_n$ es un conjunto de variables que se han definido anteriormente; $\text{val}_0, \text{val}_1, \dots, \text{val}_n$ es el conjunto de valores (numéricos o cualitativos) que pueden tomar sus correspondientes variables; $\text{OPR}_1, \text{OPR}_2, \dots, \text{OPR}_{n-1}$ son los operadores lógicos de disyunción (OR) o conjunción (AND), y \rightarrow representa el operador de implicación. Así mismo es posible utilizar el operador lógico unario de negación de la forma: $\neg (\text{var}_i = \text{val}_i)$.

El **motor de inferencia** de un sistema basado en el conocimiento es específico para el formalismo de representación del conocimiento empleado, y es independiente del dominio de aplicación. Debe ser capaz de realizar procesos de inferencia con cualquier conjunto de conocimientos representados por el formalismo elegido. En el caso de la lógica borrosa, el más comúnmente empleado es la regla composicional de inferencia o modus ponens generalizado, siendo el motor de inferencia de un controlador borroso un caso particular de éste.

a. Conjuntos borrosos

Se define un conjunto borroso como aquél en donde la pertenencia de sus elementos se define mediante la siguiente **función de pertenencia**, **función de distribución de posibilidad** o de forma más simple, **función de posibilidad**:

$$\mu_A: \mathcal{X} \rightarrow [0,1]$$

$$x \rightarrow \mu_A(x)$$

Siendo A el conjunto borroso, etiqueta lingüística o valor cualitativo perteneciente al dominio de valores cualitativos de la variable x; y \mathcal{X} es el dominio de valores numéricos de esta misma variable. La función de posibilidad $\mu_A(x)$ asigna a cada valor de $x \in \mathcal{X}$ un valor de posibilidad (y no probabilidad) de pertenencia al conjunto borroso A, comprendido entre cero (no pertenece) y uno (sí pertenece). Los valores de posibilidad intermedios representan una pertenencia parcial de los valores numéricos de x al conjunto A. Es importante subrayar que la función de pertenencia asigna valores de **posibilidad** de pertenencia de un valor numérico a un conjunto. Posibilidad se puede definir como la aptitud, potencia u ocasión para que algo exista o suceda (WordReference, 2015), en este caso, la pertenencia a un conjunto. No confundir este término con probabilidad: índice por el cual se mide la **frecuencia de un acontecimiento** determinado mediante la realización de un experimento aleatorio del que se conocen todos los resultados (Wikipedia, 2015). Poniendo un ejemplo que aclare esta distinción, se podría afirmar que “probablemente llueva en invierno en Madrid”, incluso con una cierta medida de probabilidad, porque se tiene experiencia pasada de que así ha sucedido: existe una cierta frecuencia del acontecimiento. Por el contrario, sería incorrecto afirmar que “probablemente conoceré al Presidente de los Estados Unidos”, aunque sí es posible porque existe la potencia para ello, habida cuenta de que ambos estamos vivos.

Para el caso del ejemplo mostrado en la figura 2.2, se podría definir el conjunto borroso “caluroso” mediante la siguiente función de distribución de posibilidad, representada gráficamente en la figura 2.3:

$$\mu_{\text{caluroso}}: T^a \rightarrow [0,1]; T^a \equiv [-10,50] \text{ } ^\circ\text{C}.$$

$$T \rightarrow \mu_{\text{caluroso}}(T)$$

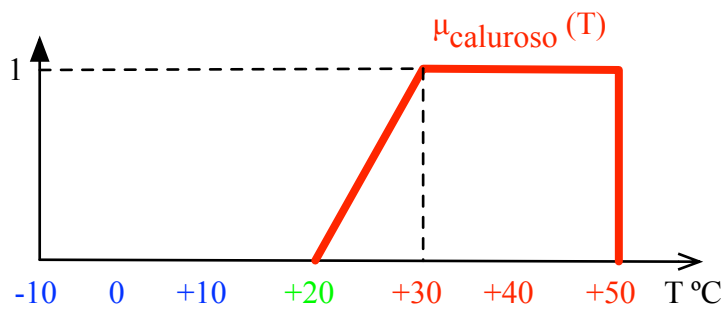


Figura 2.3. Función de distribución de posibilidad de $\mu_{\text{caluroso}}(T)$.

En este caso se tiene por seguro que $T = 40 \text{ } ^\circ\text{C}$ es caluroso, y así $\mu_{\text{caluroso}}(40) = 1$. También se sabe que $T = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$ no pertenece al conjunto caluroso, por lo que $\mu_{\text{caluroso}}(0) = 0$. Para los valores de T cuya pertenencia al conjunto “caluroso” es imprecisa, la función $\mu_{\text{caluroso}}(T)$ devuelve valores intermedios entre cero y uno. Por ejemplo $\mu_{\text{caluroso}}(23) = 0.3$. La definición del conjunto borroso “caluroso” mediante la función de pertenencia $\mu_{\text{caluroso}}(T)$ permite responder adecuadamente a la pregunta anteriormente planteada: si se considera que

una temperatura de 30 °C es calurosa, ¿se puede suponer que $T = 29$ °C también lo es?. En este caso, la respuesta es sí, aunque con una posibilidad inferior, 0.9, porque $\mu_{\text{caluroso}}(29) = 0.9$.

Las funciones de posibilidad pueden tener, en general, cualquier forma, aunque se suele optar por una de las tres mostradas en la figura 2.4: trapezoidal, en el caso de $\mu_{\text{templado}}(T)$; triangular, en el caso de $\mu_{\sim 20}(T)$; o nítida como ocurre con $\mu_{40}(T)$. Se puede considerar que $\mu_{\text{caluroso}}(T)$, mostrada en la figura 2.3, tiene una forma trapezoidal. No se representa el lado derecho por estar fuera del dominio de valores definidos para las temperaturas en Madrid, que, se recuerda, es $[-10, 50]$ °C.

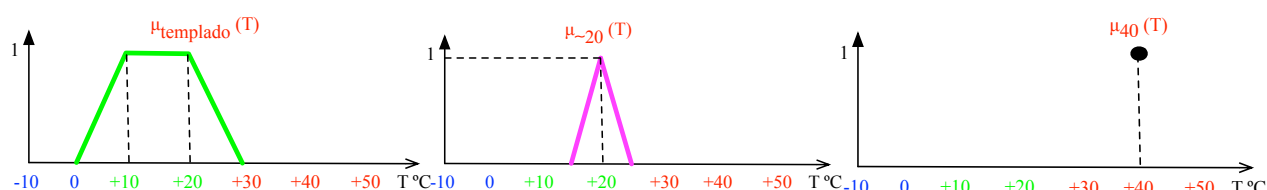


Figura 2.4. Tres formas diferentes para las distribuciones de posibilidad: trapezoidal, triangular y nítida.

La distribución de posibilidad $\mu_{\sim 20}(T)$ (leído como *mu sub alrededor de veinte*) define el conjunto borroso formado por todos los valores de temperatura que se encuentran alrededor de $T = 20$. En general, para representar conjuntos borrosos formados por valores que se encuentran en el entorno de uno central, se emplean distribuciones de posibilidad cuyo **centro de gravedad** se sitúa en dicho valor central. En el caso de $\mu_{\sim 20}(T)$ se ha optado por una distribución de posibilidad triangular, con centro de gravedad en $T = 20$, aunque también hubiera sido válida una distribución de posibilidad trapezoidal. En este caso, se ha representado una cantidad aproximada, pero se dan situaciones similares en los casos de querer representar que alguien o algo es puntual (en función del tiempo medido en minutos, t), que una trayectoria recta (en función del ángulo en radianes, ω) o que un sistema (controlador) comete un error nulo (en función del error, e). En todos ellos, se podría representar la puntualidad, la trayectoria o el error en una recta real. Los valores a la izquierda del centro de gravedad indicarían, respectivamente, antes de tiempo, trayectoria desviada hacia la izquierda y error negativo, por ejemplo. Los valores a la derecha del centro de gravedad representarían las situaciones contrarias: tarde, desvío a la derecha y error positivo. Para representar las situaciones en_punto, trayectoria recta y error nulo, se emplearían funciones de distribución de posibilidad triangulares o trapezoidales cuyo centro de gravedad estuviera situado en el valor nítido representado por la etiqueta lingüística: 0, $\pi/2$ y 0, respectivamente. La figura 2.5 muestra ejemplos de distribuciones de posibilidad para estos tres ejemplos.

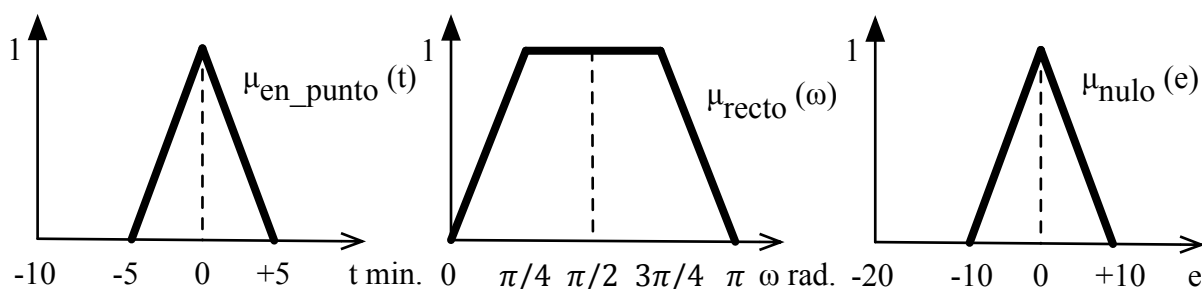


Figura 2.5. Funciones de distribución de posibilidad para representar valores pertenecientes al entorno de uno central: alguien o algo es puntual, $\mu_{\text{en_punto}}(t)$, una trayectoria recta, $\mu_{\text{recto}}(\omega)$, y un sistema de control que comete un error nulo, $\mu_{\text{nulo}}(e)$.

Volviendo a la figura 2.4, la función de distribución de posibilidad $\mu_{40}(T)$, representa el valor nítido 40. Efectivamente, los conjuntos borrosos permiten representar también conjuntos o valores nítidos, que tienen fronteras precisas. En el caso de $\mu_{40}(T)$, cualquier valor en el entorno de 40 tiene posibilidad cero de pertenecer a $T = 40$: $\mu_{40}(40 \pm \varepsilon) = 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$; mientras que $\mu_{40}(40) = 1$. Matemáticamente, $\mu_{40}(T)$ se formula como:

$$\mu_{40}(T) = \begin{cases} 1, & T = 40 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se muestra a continuación un ejemplo, dentro del dominio de las temperaturas ambientales, de definición de variables, dominios de valores numéricos y cualitativos y funciones de distribución de posibilidad de un sistema inteligente basado en lógica borrosa que maneja únicamente la variable T .

1. Definición de las variables del sistema inteligente, significado y unidades de medida.
 - T : temperatura ambiente en Madrid, medida en grados centígrados ($^{\circ}\text{C}$).
2. Definición de los dominios de valores numéricos y cualitativos de las variables.
 - $T \in [-10, 50] ^{\circ}\text{C}$.
 - $T = \{\text{frío, templado, caluroso, alrededor de } 20, 40\}$
3. Definición de las funciones de distribución de posibilidad asociadas a los valores cualitativos de cada una de las variables definidas (en este caso T). Ver figura 2.6.

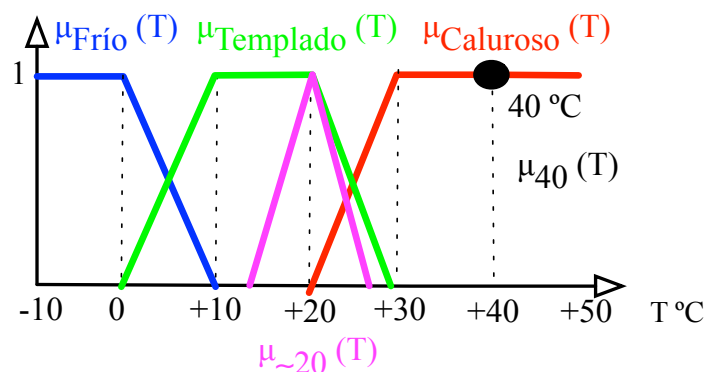


Figura 2.6. Representación gráfica de las funciones de distribución de posibilidad asociadas a los valores cualitativos definidos para la variable T .

El elemento característico de esta definición de variables en un sistema inteligente basado en lógica borrosa es el diseño de las funciones de distribución de posibilidad asociadas a las etiquetas lingüísticas, conjuntos borrosos o valores cualitativos de a cada una de las variables.

Es posible también definir conjuntos borrosos en n dimensiones mediante funciones de distribución de posibilidad de la forma $\mu_p(x_1, \dots, x_n)$. La figura 2.7 muestra un ejemplo que representa una función de distribución de posibilidad para el conjunto borroso de las personas corpulentas en función de la altura (h), medida en cm., y el peso (p), medido en Kg, notado como $\mu_{\text{corpulento}}(h, p)$.

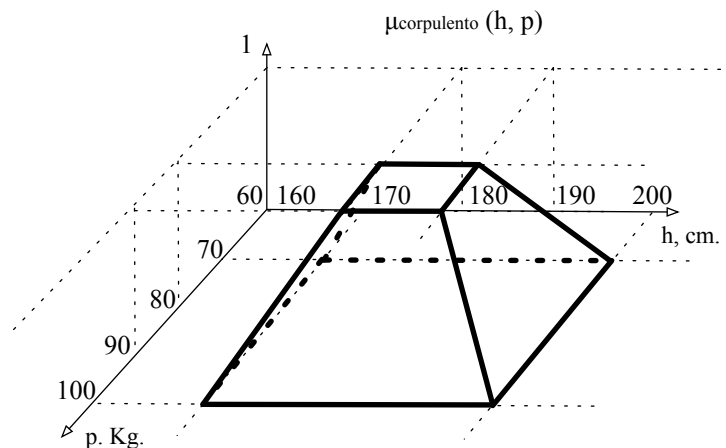


Figura 2.7. Ejemplo de función de distribución de posibilidad en dos dimensiones:
 $\mu_{\text{corpulento}}(h, p)$.

b. Operaciones con conjuntos borrosos

Dadas dos distribuciones de posibilidad $\mu_p(x)$ y $\mu_q(x)$ correspondientes a los conjuntos borrosos p y q , es posible realizar las operaciones de **intersección** (\cap) y **unión** de conjuntos borrosos (\cup), así como el cálculo del conjunto **complementario** a uno dado ($-$). Estas operaciones se realizan a través de la función de distribución de posibilidad asociada a cada conjunto borroso (**composición de funciones**). Suponga que las distribuciones de posibilidad $\mu_p(x)$ y $\mu_q(x)$ se corresponden con las de la figura 2.8.

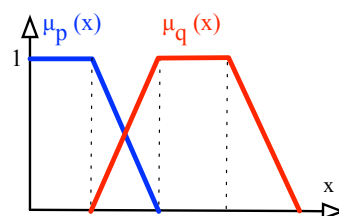


Figura 2.8. Representación gráfica de las distribuciones de posibilidad $\mu_p(x)$ y $\mu_q(x)$

A partir de la teoría clásica de conjuntos, es posible obtener, de forma intuitiva, el resultado de aplicar una operación de intersección y unión entre los conjuntos borrosos p y q a través de sus correspondientes funciones de distribución de posibilidad, $\mu_p(x)$ y $\mu_q(x)$; así como el complementario p , lo cual se muestra en la figura 2.9.

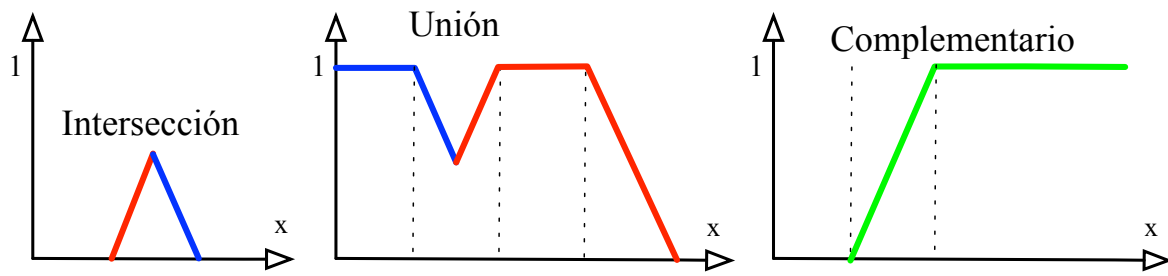


Figura 2.9. Resultado de aplicar las operaciones de intersección y unión de p y q a través de sus funciones de distribución de posibilidad $\mu_p(x)$ y $\mu_q(x)$, y el complementario de p .

Las operaciones con conjuntos borrosos (intersección, unión y complementario) tienen sus correspondientes operadores lógicos: **conjunción** (\wedge), **disyunción** (\vee) y **negación** (\neg), respectivamente. A partir de la cuantificación de la posibilidad de que sean ciertas “ x es p ” y “ x es q ” mediante $\mu_p(x)$ y $\mu_q(x)$, respectivamente, es posible expresar que “ x es p y q ” como $\mu_{p \wedge q}(x)$, “ x es p ó q ” como $\mu_{p \vee q}(x)$ y “ x es no p ” como $\mu_{\neg p}(x)$. Así mismo, se define el operador lógico **implicación** (\rightarrow), que permite expresar que “si x es p , entonces x es q ” como $\mu_{p \rightarrow q}(x)$. En este caso, resulta más conveniente nombrar a p y q como etiquetas lingüísticas o valores cualitativos en lugar de como conjuntos borrosos. Dicho de otra manera, las etiquetas lingüísticas o valores cualitativos p y q son representados como conjuntos borrosos mediante la definición de sus correspondientes funciones de distribución de posibilidad $\mu_p(x)$ y $\mu_q(x)$, respectivamente.

De la misma manera, generalizando a n dimensiones, dadas las distribuciones de posibilidad $\mu_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\mu_q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, es posible expresar la conjunción, disyunción, negación e implicación de sus correspondientes etiquetas lingüísticas (p y q) como $\mu_{p \wedge q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mu_{p \vee q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mu_{\neg p}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mu_{p \rightarrow q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, respectivamente.

Mediante el uso de los operadores lógicos, es posible representar el conocimiento con imprecisión mediante afirmaciones y reglas borrosas que relacionan etiquetas lingüísticas. Así, volviendo al ejemplo de las temperaturas ambientales, es posible expresar las afirmaciones “hoy el día es frío o templado” como $\mu_{\text{frío} \vee \text{templado}}(T)$, “no hace calor” como $\mu_{\neg \text{caluroso}}(T)$ o la regla “si la temperatura es de alrededor de 20 °C, entonces el día es templado” como $\mu_{\neg 20 \rightarrow \text{templado}}(T)$.

c. Extensión cilíndrica

Sólo es posible componer (operar) dos distribuciones de posibilidad utilizando los operadores de conjunción, disyunción o implicación cuando ambas funciones se encuentran expresadas mediante la misma variable o conjunto de variables. En efecto, todos los ejemplos empleados hasta el momento se encuentran expresados en función de la misma variable, x o T . Sin embargo, la capacidad de representación del conocimiento que ello proporciona es muy limitada, dado que no podrían expresarse, por ejemplo, reglas del tipo “si la distancia

recorrida con el taxi es corta, entonces el precio es barato”. En este caso, se están manejando dos variables, distancia y precio, relacionadas mediante la operación implicación. Más formalmente, lo que se define es “si distancia = corta, entonces precio = barato”, representado como: $\mu_{\text{corta}}(\text{distancia}) \rightarrow \mu_{\text{barato}}(\text{precio})$.

En general, dadas dos distribuciones de posibilidad $\mu_p(x)$ y $\mu_q(y)$, donde x e y pueden ser n -dimensionales, no es posible componerlas porque ambas deben estar definidas en función de las mismas variables. Para ello, dada una distribución de posibilidad $\mu_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$, se define la operación **extensión cilíndrica** de $\mu_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con y a la distribución de posibilidad $\mu_p(x_1, x_2, \dots, x_n, y) / \forall y$ y $\mu_p(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = \mu_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Es decir, se introduce la variable y en la distribución de posibilidad original, con lo que aumenta en una dimensión (se extiende cilíndricamente), pero los resultados de posibilidad que devuelve la función únicamente dependen del vector original (x_1, x_2, \dots, x_n) .

De esta forma, para poder componer dos distribuciones generales de posibilidad $\mu_p(x)$ y $\mu_q(y)$ para calcular, por ejemplo, la conjunción entre p y q , es necesario calcular, en primer lugar, la extensión cilíndrica de $\mu_p(x)$ con y para obtener $\mu_p(x, y)$. Posteriormente, se calcula la extensión cilíndrica de $\mu_q(y)$ con x para obtener $\mu_q(x, y)$, que es, evidentemente, equivalente a $\mu_q(y, x)$. Por último, puesto que ya se tienen las dos distribuciones de posibilidad expresadas en función de las mismas variables (x, y) , se aplica el operador correspondiente, en este caso la conjunción, para obtener $\mu_{p \wedge q}(x, y)$. Lógicamente, el operador de negación no tiene este problema, dado que es un operador unario, por lo que opera únicamente con una distribución de posibilidad.

Volviendo al ejemplo de las distribuciones de posibilidad $\mu_{\text{corta}}(\text{distancia})$ y $\mu_{\text{barato}}(\text{precio})$, para poder calcular la implicación entre corta y barato, representado a través de sus correspondientes funciones de distribución de posibilidad como $\mu_{\text{corta}}(\text{distancia}) \rightarrow \mu_{\text{barato}}(\text{precio})$, es necesario calcular la extensión cilíndrica de $\mu_{\text{corta}}(\text{distancia})$ con precio para obtener $\mu_{\text{corta}}(\text{distancia}, \text{precio})$. Así mismo, se calcula la extensión cilíndrica de $\mu_{\text{barato}}(\text{precio})$ con distancia para obtener $\mu_{\text{barato}}(\text{distancia}, \text{precio})$. Finalmente, se aplica el operador implicación para obtener la distribución de posibilidad resultado:

$$\mu_{\text{corta}} \rightarrow \mu_{\text{barato}}(\text{distancia}, \text{precio}).$$

La figura 2.10 muestra las extensiones cilíndricas de $\mu_{\text{corta}}(\text{distancia})$ con precio, y $\mu_{\text{barato}}(\text{precio})$ con distancia. Observe cómo, por ejemplo, en el caso de $\mu_{\text{corta}}(\text{distancia}, \text{precio})$, los valores de posibilidad devueltos únicamente dependen de la variable distancia. Es decir, $\mu_{\text{corta}}(\text{distancia}) = \mu_{\text{corta}}(\text{distancia}, \text{precio}), \forall \text{ precio}$. La inclusión de la variable precio en la función tiene el efecto de aumentar el dominio en una dimensión: de ser una función $\mathbb{R} \rightarrow [0,1]$, pasa a ser $\mathbb{R}^2 \rightarrow [0,1]$. De la misma forma, observe en la figura 2.10 que $\mu_{\text{barato}}(\text{precio}) = \mu_{\text{barato}}(\text{distancia}, \text{precio}), \forall \text{ distancia}$.

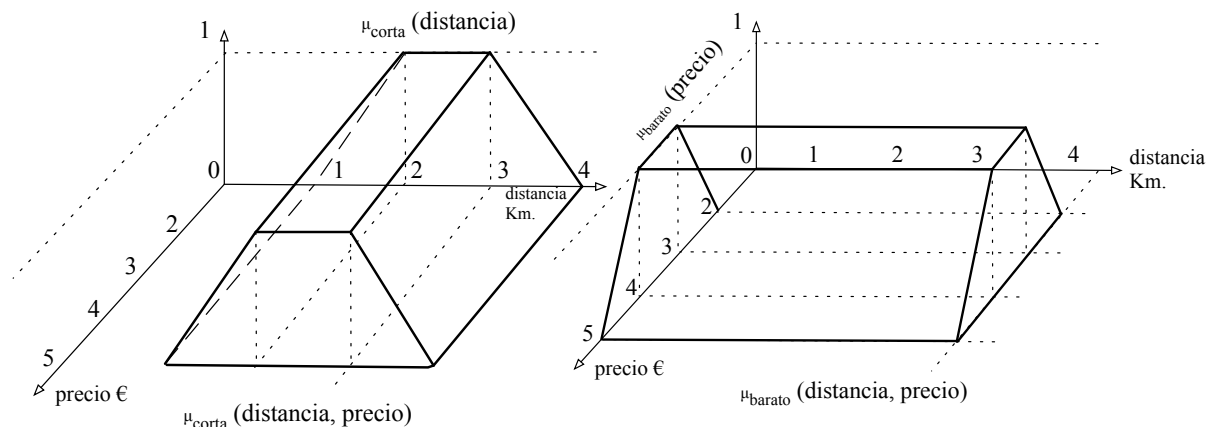


Figura 2.10. Representación gráfica de las extensiones cilíndricas de μ_{corta} (distancia) con precio y μ_{barato} (precio) con distancia.

d. Funciones t-norma, t-conorma y negación

Una **t-norma** (norma triangular) es una función T definida como:

$$T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$(x, y) \rightarrow T(x, y)$$

donde x representa el producto cartesiano. Una t-norma cumple, además, las siguientes propiedades, $\forall x, y, z, t \in [0, 1]$:

- Propiedad conmutativa: $T(x, y) = T(y, x)$.
- Propiedad asociativa: $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$.
- Elemento neutro, 1: $T(x, 1) = x$
- Monotonía: $x \leq z, y \leq t \rightarrow T(x, y) \leq T(z, t)$.

Una t-norma representa la **intersección** dentro de un retículo. Se emplea en lógica borrosa para calcular la intersección de conjuntos borrosos o la **conjunción** entre etiquetas lingüísticas o valores cualitativos en el ámbito de la lógica.

Sean las distribuciones generales de posibilidad $\mu_p(x)$ y $\mu_q(x)$, expresadas en función de la misma variable o vector $x \in \mathcal{X}$, siendo \mathcal{X} el dominio de valores (o vectores) numéricos de dimensión n que puede tomar x . Si no ocurriera así, se aplican las operaciones de extensión cilíndrica a ambas funciones para conseguir que queden expresadas en función de la misma x .

$\mu_p(x)$ y $\mu_q(x)$ definen los conjuntos borrosos p y q mediante medidas de posibilidad de pertenencia de cada uno de los valores $x \in \mathcal{X}$ a p y q respectivamente: $\mu_p: \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$; $\mu_q: \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$. En el ámbito de la lógica, $\mu_p(x)$ y $\mu_q(x)$ representan las afirmaciones “ x es p ” y “ x es q ” respectivamente. Si se aplica la función t-norma a cada uno de los valores de posibilidad de $\mu_p(x)$ y $\mu_q(x)$ $\forall x \in \mathcal{X}$, se obtiene otra distribución de posibilidad, en función

de la misma variable x , que representa la intersección de los conjuntos borrosos $p \cap q$, o la conjunción en el ámbito de la lógica: “ x es p y q ”. Esta nueva función de distribución de posibilidad se expresa formalmente como:

$$\mu_{p \wedge q}(x): \mathcal{X} \rightarrow [0, 1].$$

Sea M el conjunto de todas las funciones de distribución de posibilidad expresadas en función de la variable o vector x . $\forall \mu_p(x), \mu_q(x) \in M$, la función t-norma, T , aplicada a $\mu_p(x)$ y $\mu_q(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$ se expresa como:

$$T: M^2 \rightarrow M$$

$$\mu_p(x), \mu_q(x) \rightarrow \mu_{p \wedge q}(x)$$

Así, para calcular $\mu_p(x) \wedge \mu_q(x)$, se aplica la función t-norma: $T(\mu_p(x), \mu_q(x)) = \mu_{p \wedge q}(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$. Las funciones t-norma aplicadas a distribuciones de posibilidad cumplen las mismas **propiedades**, $\forall \mu_p(x), \mu_q(x), \mu_r(x), \mu_s(x) \in M$:

- Propiedad conmutativa: $T(\mu_p(x), \mu_q(x)) = T(\mu_q(x), \mu_p(x))$.
- Propiedad asociativa: $T[\mu_p(x), T(\mu_q(x), \mu_r(x))] = T[T(\mu_p(x), \mu_q(x)), \mu_r(x)]$.
- Elemento neutro: la función de posibilidad $\mu_1(x) = 1 \forall x \in \mathcal{X}$; $T(\mu_p(x), \mu_1(x)) = \mu_p(x)$
- Monotonía:

$$\text{Si } \forall x \in \mathcal{X}, \mu_p(x) \leq \mu_r(x), \mu_q(x) \leq \mu_t(x) \rightarrow T(\mu_p(x), \mu_q(x)) \leq T(\mu_r(x), \mu_t(x)).$$

Con el fin de simplificar la notación, se expresan las funciones de distribución de posibilidad $\mu_p(x), \mu_q(x), \mu_r(x), \mu_s(x) \in M$ como $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$ respectivamente, de tal forma que $T(\mu_p(x), \mu_q(x))$ queda como $T(\dot{x}, \dot{y})$. La función de distribución de posibilidad $\mu_1(x) = 1 \forall x \in \mathcal{X}$, elemento neutro de la t-norma, se expresa como 1, y $\mu_0(x) = 0 \forall x \in \mathcal{X}$, como 0.

Ejemplos de funciones t-norma son las siguientes, $\forall x \in \mathcal{X}$:

- t-norma del mínimo (o de Gödel): $T(\dot{x}, \dot{y}) = \min(\dot{x}, \dot{y})$.
- t-norma del producto, P : $T(\dot{x}, \dot{y}) = P(\dot{x}, \dot{y}) = \dot{x} \cdot \dot{y}$.
- t-norma de Łukasiewicz, W :

$$T(\dot{x}, \dot{y}) = W(\dot{x}, \dot{y}) = \max(0, \dot{x} + \dot{y} - 1).$$

- t-norma drástica, Z :

$$T(\dot{x}, \dot{y}) = Z(\dot{x}, \dot{y}) = \begin{cases} \dot{x}, & \text{si } \dot{y} = 1 \\ \dot{y}, & \text{si } \dot{x} = 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se puede demostrar de forma sencilla que los cuatro ejemplos de funciones t-norma anteriores cumplen las propiedades de toda t-norma.

La función de distribución de posibilidad que representa la intersección (o conjunción) entre p y q en la figura 2.9 muestra el resultado de aplicar la t-norma del mínimo a las distribuciones de posibilidad definidas gráficamente en la figura 2.8.

Una **t-conorma** (o S-norma) es una función S (también notada como \perp) definida como:

$$S: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$(x, y) \rightarrow S(x, y)$$

donde x representa el producto cartesiano. Una función t-conorma cumple, además, las siguientes propiedades, $\forall x, y, z, t \in [0, 1]$:

- Propiedad conmutativa: $S(x, y) = S(y, x)$.
- Propiedad asociativa: $S(S(x, y), z) = S(x, S(y, z))$.
- Elemento neutro, 0: $S(x, 0) = x$
- Monotonía: $x \leq z, y \leq t \rightarrow S(x, y) \leq S(z, t)$.

La t-conorma se emplea en lógica borrosa para calcular la **unión** de conjuntos borrosos o la **disyunción** de etiquetas lingüísticas o valores cualitativos en el ámbito de la lógica.

Sean las distribuciones generales de posibilidad $\mu_p(x)$ y $\mu_q(x)$, expresadas en función de la misma variable o vector $x \in \mathcal{X}$. Si se aplica la función t-conorma a cada uno de los valores de posibilidad de $\mu_p(x)$ y $\mu_q(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, se obtiene otra distribución de posibilidad, en función de las mismas variables x , que representa la unión de los conjuntos borrosos $p \cup q$, o la disyunción en el ámbito de la lógica: “ x es p ó q ”. Esta nueva función de distribución de posibilidad se expresa formalmente como:

$$\mu_{p \vee q}(x): \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$$

$\forall \mu_p(x), \mu_q(x) \in M$, la función t-conorma, S , aplicada a $\mu_p(x)$ y $\mu_q(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$ se expresa como:

$$S: M^2 \rightarrow M$$

$$\mu_p(x), \mu_q(x) \rightarrow \mu_{p \vee q}(x)$$

Así, para calcular $\mu_p(x) \vee \mu_q(x)$, se aplica la función t-conorma: $S(\mu_p(x), \mu_q(x)) = \mu_{p \vee q}(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$. De nuevo, para simplificar la notación, se plantean las siguientes equivalencias: sean $\mu_p(x), \mu_q(x), \mu_r(x), \mu_s(x) \in M$; $\mu_p(x) \equiv \dot{x}$, $\mu_q(x) \equiv \dot{y}$, $\mu_r(x) \equiv \dot{z}$, $\mu_s(x) \equiv \dot{t}$. De esta forma, $T(\mu_p(x), \mu_q(x)) \equiv T(\dot{x}, \dot{y})$. Así mismo, la función de distribución de posibilidad $\mu_1(x) = 1 \forall x \in \mathcal{X}$ se expresa como 1, y $\mu_0(x) = 0 \forall x \in \mathcal{X}$, como 0.

Las funciones t-norma aplicadas a distribuciones de posibilidad cumplen las mismas **propiedades** $\forall \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t} \in M$:

- Propiedad conmutativa: $S(\dot{x}, \dot{y}) = S(\dot{y}, \dot{x})$.
- Propiedad asociativa: $S[\dot{x}, S(\dot{y}, \dot{z})] = S[S(\dot{x}, \dot{y}), \dot{z}]$.
- Elemento neutro: la función de posibilidad $\mu_0(x) = 0, \forall x \in \mathcal{X}; S(\dot{x}, 0) = \dot{x}$
- Monotonía: $\dot{x} \leq \dot{z}, \dot{y} \leq \dot{t} \rightarrow S(\dot{x}, \dot{y}) \leq S(\dot{z}, \dot{t})$.

Ejemplos de funciones t-conorma son las siguientes, $\forall x \in \mathcal{X}$:

- t-conorma del máximo (o de Gödel): $S(\dot{x}, \dot{y}) = \max(\dot{x}, \dot{y})$.
- t-conorma de la suma-producto, P' : $S(\dot{x}, \dot{y}) = P'(\dot{x}, \dot{y}) = \dot{x} + \dot{y} - \dot{x} \cdot \dot{y}$.
- t-conorma de Łukasiewicz, W' : $S(\dot{x}, \dot{y}) = W'(\dot{x}, \dot{y}) = \min(1, \dot{x} + \dot{y})$.
- t-conorma drástica, Z' :

$$S(\dot{x}, \dot{y}) = Z'(\dot{x}, \mu_q(x)) = \begin{cases} \dot{x}, & \text{si } \dot{y} = 0 \\ \dot{y}, & \text{si } \dot{x} = 0 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se puede demostrar de forma sencilla que los cuatro ejemplos de funciones t-conorma anteriores cumplen las propiedades de las t-conormas.

La función de distribución que representa la unión (o disyunción) entre p y q en la figura 2.9 muestra el resultado de aplicar la t-conorma del máximo a las distribuciones de posibilidad definidas gráficamente en la figura 2.8.

La función de **negación**, **N**, se define como:

$$\begin{aligned} N: [0,1] &\rightarrow [0,1] \\ x &\rightarrow N(x) \end{aligned}$$

La función de negación N cumple las siguientes **propiedades**, $\forall x, y \in [0, 1]$:

- Condiciones frontera: $N(0) = 1; N(1) = 0$.
- Inversión de monotonía: $x \leq y \rightarrow N(x) \geq N(y)$.

La negación se emplea en lógica borrosa para calcular el conjunto borroso **complementario** o la **negación** en el ámbito de la lógica.

Sea la distribución general de posibilidad $\mu_p(x)$. Si se aplica la función negación a cada uno de los valores de posibilidad de $\mu_p(x) \forall x \in \mathcal{X}$, se obtiene otra distribución de posibilidad que representa el conjunto borroso complementario de p, o la negación en el ámbito de la lógica: “x es no p”. Esta nueva función de distribución de posibilidad se expresa formalmente como:

$$\mu_{\neg p}(x): \mathcal{X} \rightarrow [0, 1].$$

$\forall \mu_p(x) \in M$, la función negación, N , aplicada a $\mu_p(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$ se expresa como:

$$N: M \rightarrow M$$

$$\mu_p(x) \rightarrow \mu_{\neg p}(x)$$

La función de negación, aplicada a funciones de distribución de posibilidad, cumple las mismas **propiedades**. $\forall \dot{x}, \dot{y} \in M$, representando $\mu_0(x) = 0$, $\forall x \in \mathcal{X}$ como 0 y $\mu_1(x) = 1$, $\forall x \in \mathcal{X}$ como 1:

- Condiciones frontera: $N(0) = 1$; $N(1) = 0$.
- Inversión de monotonía: Si $\forall x \in \mathcal{X}$, $\dot{x} \leq \dot{y} \rightarrow N(\dot{x}) \geq N(\dot{y})$.

Ejemplos de funciones de negación son las siguientes, $\forall x \in \mathcal{X}$:

- $N(\dot{x}) = 1 - \dot{x}$.
- $N(\dot{x}) = [1 - \dot{x}^2]^{1/2}$.

Se podría demostrar de forma sencilla que los dos ejemplos de funciones de negación anteriores cumplen las propiedades.

La distribución de posibilidad que representa el complementario (o negación) de p en la figura 2.9 muestra el resultado de aplicar la función de negación $N(\dot{x}) = 1 - \dot{x}$ a la distribución de posibilidad $\mu_p(x)$, definida gráficamente en la figura 2.8.

Nótese que, al contrario de lo que ocurre en la lógica bivalente, la conjunción entre una afirmación y su negación en lógica borrosa, calculada mediante la t-norma de sus correspondientes funciones de distribución de posibilidad, no tiene porqué ser necesariamente falsa (valor cero de posibilidad) para todos los valores del dominio. Es decir:

$$\exists \mu_p(x) \in M / T(\mu_p(x), \mu_{\neg p}(x)) \neq \mu_0(x); \text{ siendo } \mu_0(x) = 0 \forall x \in \mathcal{X}.$$

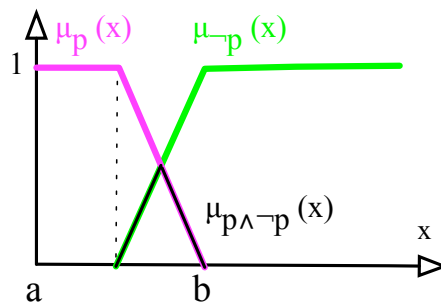


Figura 2.11. $\forall x \in (a,b) \subset \mathcal{X}$, $T(\mu_p(x), \mu_{\neg p}(x)) \neq 0$. Cálculo realizado con la t-norma del mínimo.

La figura 2.11 muestra un caso genérico en el que la conjunción entre las afirmaciones “ x es p ” y “ x es no p ”, calculado como $T(\mu_p(x), \mu_{\neg p}(x))$, con la t-norma del mínimo, obtiene como resultado una distribución de posibilidad en donde se cumple que $\forall x \in (a,b) \subset \mathcal{X}$, $T(\mu_p(x), \mu_{\neg p}(x)) \neq 0$.

Paralelamente, en teoría de conjuntos borrosos, también se cumple que, dado un conjunto borroso p definido mediante la función de pertenencia $\mu_p(x)$, $p \cap \neg p \neq \emptyset$. Siendo \emptyset el conjunto vacío.

e. Dualidad

Un sistema inteligente basado en lógica borrosa puede utilizar cualquier t-norma, t-conorma o función de negación, siempre y cuando se cumplan las condiciones de dualidad entre ellas.

$\forall \dot{x}, \dot{y} \in M$, se dice que **una t-norma $T(\dot{x}, \dot{y})$ y una t-conorma $S(\dot{x}, \dot{y})$ son duales** con respecto a la negación $N(\dot{x})$, si y solo si $\forall x \in \mathcal{X}$:

- $N(T(\dot{x}, \dot{y})) = S(N(\dot{x}), N(\dot{y}))$.
- $N(S(\dot{x}, \dot{y})) = T(N(\dot{x}), N(\dot{y}))$.

En relación a las t-normas y t-conormas expuestas como ejemplo anteriormente en la sección 2.d, son duales con respecto a la negación $N(\dot{x}) = 1 - \dot{x}$, con $1 \equiv \mu_1(x) = 1, \forall x \in \mathcal{X}$, los siguientes pares:

- $\langle \mathbf{mín}(\dot{x}, \dot{y}), \mathbf{máx}(\dot{x}, \dot{y}) \rangle$, Gödel.
- $\langle \mathbf{P}(\dot{x}, \dot{y}), \mathbf{P}'(\dot{x}, \dot{y}) \rangle$, Producto, Suma-Producto.
- $\langle \mathbf{W}(\dot{x}, \dot{y}), \mathbf{W}'(\dot{x}, \dot{y}) \rangle$, Łukasiewicz.
- $\langle \mathbf{Z}(\dot{x}, \dot{y}), \mathbf{Z}'(\dot{x}, \dot{y}) \rangle$, Drástica.

Se demuestra a continuación, a modo de ejemplo, que la t-norma del producto y la t-conorma de la suma-producto son duales con respecto a la negación $N(\dot{x}) = 1 - \dot{x}, \forall x \in \mathcal{X}$.

Las condiciones necesarias y suficientes para que se dé la dualidad son las siguientes:

1. $N(P(\dot{x}, \dot{y})) = P'(N(\dot{x}), N(\dot{y}))$.
2. $N(P'(\dot{x}, \dot{y})) = P(N(\dot{x}), N(\dot{y}))$.

Para la **primera condición**, sustituyendo a N por su correspondiente expresión $1 - \dot{x}$, se tiene:

$$1 - (P(\dot{x}, \dot{y})) = P'(1 - \dot{x}, 1 - \dot{y})$$

Sustituyendo ahora P y P' por sus correspondientes expresiones:

$$1 - \dot{x} \cdot \dot{y} = 1 - \dot{x} + 1 - \dot{y} - [(1 - \dot{x}) \cdot (1 - \dot{y})]$$

Desarrollando la parte derecha de la igualdad:

$$1 - \dot{x} \cdot \dot{y} = 1 - \dot{x} + 1 - \dot{y} - [1 - \dot{x} - \dot{y} + \dot{x} \cdot \dot{y}]$$

Se elimina el signo menos anterior a los corchetes:

$$1 - \dot{x} \cdot \dot{y} = 1 - \dot{x} + 1 - \dot{y} - 1 + \dot{x} + \dot{y} - \dot{x} \cdot \dot{y}$$

Se tiene \dot{x} , $-\dot{x}$; \dot{y} , $-\dot{y}$; $1 - 1$; por tanto, se simplifica, quedando :

$$1 - \dot{x} \cdot \dot{y} = 1 - \dot{x} \cdot \dot{y}$$

Para la **segunda condición**, se desarrolla de forma similar:

$$1 - (\dot{x} + \dot{y} - \dot{x} \cdot \dot{y}) = (1 - \dot{x}) \cdot (1 - \dot{y})$$

Desarrollando ambos lados de la igualdad, se tiene:

$$1 - \dot{x} - \dot{y} + \dot{x} \cdot \dot{y} = 1 - \dot{x} - \dot{y} + \dot{x} \cdot \dot{y}$$

Dado que se cumplen las dos leyes de la dualidad y que son condiciones necesarias y suficientes para ello, queda demostrado que $P(\dot{x}, \dot{y}) = \dot{x} \cdot \dot{y}$, y $P'(\dot{x}, \dot{y}) = \dot{x} + \dot{y} - \dot{x} \cdot \dot{y}$ son duales con respecto a la negación $N(\dot{x}) = 1 - \dot{x}$.

Para construir un sistema inteligente que maneje conocimiento con imprecisión utilizando la lógica borrosa, **es necesario que las funciones t-norma T y t-conorma S elegidas sean duales con respecto a una negación N**. A partir de estas tres funciones, que permiten calcular relaciones entre conjuntos borrosos o etiquetas lingüísticas a través de sus correspondientes distribuciones de posibilidad, es posible representar el conocimiento en base a afirmaciones que combinen conjunciones, disyunciones y negaciones. Por ejemplo: “x es p y no q” o “la temperatura ambiente es calurosa y no fría”. Estas afirmaciones permiten construir los antecedentes de las reglas borrosas que forman parte de la base de conocimiento de un sistema inteligente basado en reglas borrosas.

f. Implicación difusa

Sean las distribuciones generales de posibilidad $\mu_p(x) \equiv \dot{x}$ y $\mu_q(x) \equiv \dot{y}$, expresadas en función de la misma variable o vector $x \in \mathcal{X}$, siendo \mathcal{X} el conjunto de valores o vectores numéricos de dimensión n que puede tomar x. Si no ocurriera así, se aplicarían las operaciones de extensión cilíndrica a ambas funciones para conseguir que queden expresadas en función de la misma x.

Sea M el conjunto de todas las funciones de distribución de posibilidad expresadas en función de la variable o vector x. $\forall \mu_p(x), \mu_q(x) \in M$, la función **implicación**, J, se define como:

$$J: M^2 \rightarrow M$$

$$\mu_p(x), \mu_q(x) \rightarrow \mu_{p \rightarrow q}(x)$$

La función implicación recibe como parámetro dos distribuciones de posibilidad expresadas en función de la misma variable o vector, y devuelve, como resultado, otra distribución en función de las mismas variables que representa la **implicación** de las correspondientes etiquetas lingüísticas o valores cualitativos en el ámbito de la lógica. Así, para calcular $\mu_p(x) \rightarrow \mu_q(x)$, se aplica la función implicación: $J(\mu_p(x), \mu_q(x)) \equiv J(\dot{x}, \dot{y}) = \mu_{p \rightarrow q}(x)$.

Dada una t-conorma S y una negación N , se puede obtener una expresión para la función implicación J . A partir de la lógica proposicional, dadas dos proposiciones A y B , se sabe que $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$. Sustituyendo la negación por la función de negación borrosa N y la disyunción por la t-conorma S , se tiene: $J(\dot{x}, \dot{y}) = S(N(\dot{x}), \dot{y})$. Tomando: $N(\dot{x}) = 1 - \dot{x}$, con $\mu_0(x) = 0 \equiv 0$, $\mu_1(x) = 1 \equiv 1$, $\forall x \in \mathcal{X}$, es posible obtener una expresión para la implicación difusa en base a la t-conorma S elegida:

- Con $S(\dot{x}, \dot{y}) = \text{máx}(\dot{x}, \dot{y})$, se tiene:

$$J(\dot{x}, \dot{y}) = \text{máx}(1 - \dot{x}, \dot{y}).$$

- Con $S(\dot{x}, \dot{y}) = P'(\dot{x}, \dot{y}) = \dot{x} + \dot{y} - \dot{x} \cdot \dot{y}$, se tiene:

$$J(\dot{x}, \dot{y}) = 1 - \dot{x} + \dot{x} \cdot \dot{y}.$$

- Con $S(\dot{x}, \dot{y}) = W'(\dot{x}, \dot{y}) = \text{mín}(1, \dot{x} + \dot{y})$, se tiene:

$$J(\dot{x}, \dot{y}) = \text{mín}(1, 1 - \dot{x} + \dot{y}).$$

- Con:

$$S(\dot{x}, \dot{y}) = Z'(\dot{x}, \dot{y}) = \begin{cases} \dot{x}, & \text{si } \dot{y} = 0 \\ \dot{y}, & \text{si } \dot{x} = 0 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se tiene:

$$J(\dot{x}, \dot{y}) = \begin{cases} \dot{y}, & \text{si } \dot{x} = 1 \\ 1 - \dot{x}, & \text{si } \dot{y} = 0 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A modo de ejemplo ilustrativo, se indica a continuación cómo se deduce la función de implicación J a partir de la t-conorma de la suma-producto, $S(\dot{x}, \dot{y}) = P'(\dot{x}, \dot{y}) = \dot{x} + \dot{y} - \dot{x} \cdot \dot{y}$, y la negación $N(\dot{x}) = 1 - \dot{x}$, $\forall x \in \mathcal{X}$:

Se tiene que $J(\dot{x}, \dot{y}) = S(N(\dot{x}), \dot{y})$.

Sustituyendo N por su valor:

$$J(\dot{x}, \dot{y}) = S(1 - \dot{x}, \dot{y})$$

Puesto que $S(\dot{x}, \dot{y}) = P'(\dot{x}, \dot{y}) = \dot{x} + \dot{y} - \dot{x} \cdot \dot{y}$:

$$J(\dot{x}, \dot{y}) = 1 - \dot{x} + \dot{y} - (1 - \dot{x}) \cdot \dot{y}$$

Operando:

$$J(\dot{x}, \dot{y}) = 1 - \dot{x} + \dot{y} - \dot{y} + \dot{x} \cdot \dot{y}$$

Simplificando:

$$J(\dot{x}, \dot{y}) = 1 - \dot{x} + \dot{x} \cdot \dot{y}$$

Utilizando la notación tradicional:

$$J(\mu_p(x), \mu_q(x)) = \mu_l(x) - \mu_p(x) + \mu_p(x) \cdot \mu_q(x)$$

Dadas las proposiciones A y B, a partir de las equivalencias en lógica proposicional, también se tiene que $A \vee B \equiv A \vee (\neg A \wedge B)$. Puesto que $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$, es posible obtener otro conjunto de expresiones válidas para la implicación difusa con $N(\dot{x}) = 1 - \dot{x}$, con $\mu_0(x) = 0 \equiv 0$, $\mu_1(x) = 1 \equiv 1$, $\forall x \in \mathcal{X}$, una t-norma T cualquiera y la correspondiente t-conorma S dual con respecto a la negación N:

- Con $\langle \mathbf{mín}(\dot{x}, \dot{y}), \mathbf{máx}(\dot{x}, \dot{y}) \rangle$, se tiene:

$$J(\dot{x}, \dot{y}) = \mathbf{máx}(1 - \dot{x}, \mathbf{mín}(\dot{x}, \dot{y})).$$

- Con $\langle \mathbf{P}(\dot{x}, \dot{y}), \mathbf{P}'(\dot{x}, \dot{y}) \rangle$, se tiene:

$$J(\dot{x}, \dot{y}) = 1 - \dot{x} + \dot{x}^2 \cdot \dot{y}.$$

- Con $\langle \mathbf{W}(\dot{x}, \dot{y}), \mathbf{W}'(\dot{x}, \dot{y}) \rangle$, se tiene:

$$J(\dot{x}, \dot{y}) = \mathbf{máx}(1 - \dot{x}, \dot{y}).$$

- Con $\langle \mathbf{Z}(\dot{x}, \dot{y}), \mathbf{Z}'(\dot{x}, \dot{y}) \rangle$, se tiene:

$$J(\dot{x}, \dot{y}) = \begin{cases} \dot{y}, & \text{si } \dot{x} = 1 \\ 1 - \dot{x}, & \text{si } \dot{x}, \dot{y} \neq 1 \\ 1, & \text{si } \dot{x} \neq 1, \dot{y} = 1 \end{cases}$$

Por tanto, dado $N(\dot{x}) = 1 - \dot{x}$, con $\mu_0(x) = 0 \equiv 0$, $\mu_1(x) = 1 \equiv 1$, $\forall x \in \mathcal{X}$, una t-norma T cualquiera y la correspondiente t-conorma S dual con respecto a la negación N, es posible deducir y emplear dos funciones de implicación J diferentes, siendo ambas correctas desde el punto de vista formal.

Implementar un motor de inferencia para un sistema basado en el conocimiento con lógica borrosa como formalismo de representación del conocimiento implica elegir una t-norma para la conjunción, una t-conorma para la disyunción, una negación y una función de implicación. La t-norma y t-conorma elegidas deben ser duales con respecto a la negación. Así mismo, en general (excepto en el caso de implementar un controlador borroso), se debe elegir una función de implicación que se deduzca de las anteriores.

En el caso de los controladores borrosos, se emplea siempre la función de implicación de Mamdani [Mamdani, 1977]. Dadas dos funciones de distribución de posibilidad $\mu_p(x)$, $\mu_q(x) \in M$, la función de implicación de Mamdani se podría definir como, $\forall x \in \mathcal{X}$:

$$J(\mu_p(x), \mu_q(x)) = \mathbf{mín}(\mu_p(x), \mu_q(x)).$$

O, de forma equivalente:

$$J(\tilde{x}, \tilde{y}) = \min(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

En base a la definición de las cuatro operaciones en lógica borrosa (conjunción, disyunción, negación e implicación) es posible construir bases de reglas que manejan términos con valores cualitativos del tipo: “Si la cantidad de monóxido de carbono es elevada y la tendencia es positiva o la visibilidad no es clara, entonces la potencia de ventilación debe ser alta”. Esta regla combina las cuatro operaciones lógicas e involucra a cuatro variables diferentes (cantidad de monóxido de carbono, tendencia, visibilidad y potencia de ventilación), cada una de las cuales con un valor cualitativo asignado (elevada, positiva, clara y alta, respectivamente). Tanto las variables involucradas como sus valores cualitativos y las funciones de distribución de posibilidad correspondientes deben haber sido definidas previamente para la construcción de un supuesto sistema basado en el conocimiento que controle la ventilación de un recinto.

g. Ejemplos

1. Sean las distribuciones generales de posibilidad $\mu_p(x)$ y $\mu_q(y)$. ¿Qué operaciones hay que realizar para poder calcular la distribución de $\mu_p(x) \rightarrow \mu_q(y)$?

Para poder calcular la implicación entre dos distribuciones de posibilidad es necesario que ambas estén definidas en función de las mismas variables. Para ello, en primer lugar, es necesario calcular las correspondientes extensiones cilíndricas con x e y . Posteriormente, se calcula la implicación utilizando la función J correspondiente. Por tanto:

- Cálculo de la extensión cilíndrica de $\mu_p(x)$ con y , para obtener $\mu_p(x, y)$.
- Cálculo de la extensión cilíndrica de $\mu_q(y)$ con x , para obtener $\mu_q(x, y)$.
- Aplicar una operación de implicación J : $J(\mu_p(x, y), \mu_q(x, y)) = \mu_{p \rightarrow q}(x, y)$.

2. Sea un sistema inteligente basado en lógica difusa que maneja la calefacción de una vivienda. Este sistema inteligente se encarga de calcular la temperatura que debe tener el agua que circula por los radiadores en función de la temperatura exterior y de la hora. Por tanto, se manejan las siguientes variables:

- *TE*: Temperatura ambiente exterior, con tres valores posibles: Frío (*F*), Templado (*T*) y Cálido (*C*). Su intervalo de valores es $[-10, 40]$ °C.
- *TA*: Temperatura del agua que circula por los radiadores, con tres posibles valores: Agua Fría (*AF*), Agua Templada (*AT*) y Agua Caliente (*AC*). Su intervalo de valores es $(0, 100)$ °C.
- *TIME*: hora del día, con cuatro posibles valores: Madrugada (*M*), Mañana (*Ma*), Tarde (*T*) y Noche (*N*). Su Intervalo de valores es $[0, 24)$.

Se pide: Representar gráficamente las distribuciones de posibilidad de los valores cualitativos asociados a las variables TE y $TIME$.

En este caso, se definen parcialmente las variables que debe manejar un sistema basado en el conocimiento para controlar el sistema de calefacción de una vivienda, y se pide que se complete con la definición de las funciones de distribución de posibilidad asociadas a los valores cualitativos de dos de sus variables. Existen varias posibles soluciones, una de las cuales se muestra gráficamente en la figura 2.12.

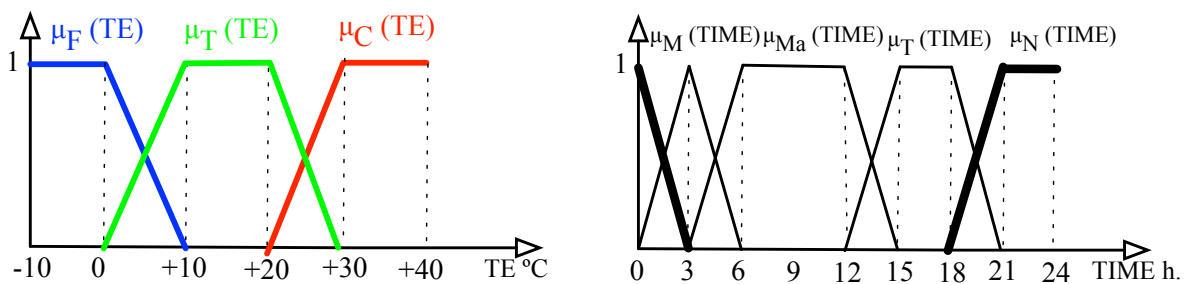


Figura 2.12. Representación gráfica de las funciones de distribución de posibilidad asociadas a los valores cualitativos de las variables TE y $TIME$.

Es importante observar el caso de la función de distribución de posibilidad asociada al valor cualitativo Noche (N) de la variable $TIME$ (en trazo grueso), el cual comienza en $TIME = 18$ h. y termina en $TIME = 3$. Es decir, tiene forma de trapecio.

3. Con respecto a las funciones de distribución de posibilidad definidas en el ejemplo 2, ¿hay posibilidad distinta de cero de que la temperatura exterior (TE) sea a la vez fría (F) y templada (T)?. En caso afirmativo, indique para qué valores de la variable TE se cumple esta condición.

Sí, $\forall TE \in (0, 10)$. Nótese que el intervalo es abierto por los dos extremos.

4. ¿Cuál es la posibilidad de que la temperatura exterior (TE) sea templada (T) si hay 40 $^{\circ}C$?. ¿Cuál es la posibilidad de una temperatura exterior (TE) cálida (C) si hay 40 $^{\circ}C$?

$\mu_T(40) = 0$; $\mu_C(40) = 1$; dado que el dominio de valores numéricos para TE es cerrado.

5. ¿Cuál es la posibilidad de que la temperatura exterior (TE) sea templada (T), teniendo en cuenta que hay 20 $^{\circ}C$ en el exterior y la temperatura del agua (TA) es actualmente de 40 $^{\circ}C$?

Dado que no está definida la función de distribución de posibilidad $\mu_T(TE, TA)$, sino sólo para la variable TE , se calcula la extensión cilíndrica de $\mu_T(TE)$ con TA , de tal forma que:

$\forall TA \mu_T(TE, TA) = \mu_T(TE)$, por definición de la extensión cilíndrica. Puesto que:

$\mu_T(TE = 20) = 1$, entonces $\mu_T(TE = 20, TA = 40) = 1$. De hecho, $\forall TA \mu_T(TE = 20, TA) = 1$.

3. Razonamiento en lógica borrosa

Un sistema basado en el conocimiento que emplea la lógica borrosa como formalismo de representación debe definir, para un determinado dominio, el conjunto de variables a emplear y su significado (semántica). Para cada una de estas variables, se define, asimismo, el dominio de valores numérico que puede tomar, su unidad de medida y el conjunto de valores cualitativos, etiquetas lingüísticas o conjuntos borrosos que se pueden asignar. Por último, para cada valor cualitativo que puede tomar cada variable, se define su función de pertenencia o función de distribución de posibilidad.

Así mismo, se debe definir el conjunto de reglas borrosas, incluidas en la base de conocimiento del sistema inteligente, que relacionan a las variables entre sí mediante el empleo de los operadores lógicos borrosos: conjunción, disyunción, negación o implicación. Una regla borrosa sigue la siguiente sintaxis:

$$\textit{antecedente} \rightarrow \textit{consecuente}$$

El *antecedente* está formado por conjunto de cláusulas de la forma *variable = valor* ó *variable es valor*, donde *valor* puede ser numérico (nítido) o cualitativo (borroso). En el primer caso, el valor debe pertenecer al dominio de valores numéricos definido para la variable. En el caso de que el valor asignado a la variable sea cualitativo, se debe definir su correspondiente función de distribución de posibilidad. Las cláusulas del antecedente se unen mediante los operadores lógicos borrosos de conjunción (\wedge) o disyunción (\vee). Asimismo, cada cláusula puede estar afectada por el operador de negación (\neg). El *consecuente* está generalmente formado por una única cláusula de la forma *variable = valor* ó *variable es valor*. El *antecedente* y el *consecuente* de una regla borrosa se relacionan entre sí mediante el operador lógico borroso de implicación (\rightarrow). Por tanto, una regla borrosa puede tener cualquiera de las cuatro formas siguientes, donde op_1, \dots, op_{n-1} son los operadores borrosos de conjunción o disyunción, $[N]$ representa la opción de que la cláusula siguiente pudiera estar afectada por la negación y \rightarrow representa el operador borroso de implicación:

1. Si $[N] x_1 \text{ es } A_1 \text{ } op_1 [N] x_2 \text{ es } A_2 \text{ } op_2 \dots op_{n-1} [N] x_n \text{ es } A_n$, entonces $y \text{ es } B$.
2. $[N] x_1 = A_1 \text{ } op_1 [N] x_2 = A_2 \text{ } op_2 \dots op_{n-1} [N] x_n = A_n \rightarrow y = B$.
3. $[N] A_1 (x_1) \text{ } op_1 [N] A_2 (x_2) \text{ } op_2 \dots op_{n-1} [N] A_n (x_n) \rightarrow B (y)$.
4. $[N] \mu_{A_1} (x_1) \text{ } op_1 [N] \mu_{A_2} (x_2) \text{ } op_2 \dots op_{n-1} [N] \mu_{A_n} (x_n) \rightarrow \mu_B (y)$.

La primera de las formas es la más cercana al lenguaje natural. Un ejemplo es el siguiente:

Si la cantidad de CO₂ *es* elevada **y** la tendencia *es* positiva **o** la visibilidad **no** *es* clara, **entonces** la potencia de ventilación *es* alta.

La segunda se formaliza más, empleando para ello únicamente notación lógico-matemática, de la forma *variable = valor* (nítido o cualitativo):

$(\text{cantidad de CO}_2 = \text{elevada}) \wedge (\text{tendencia} = \text{positiva}) \vee (\neg \text{visibilidad} = \text{clara}) \rightarrow \text{potencia de ventilación} = \text{alta}.$

La tercera forma de expresar una regla borrosa se emplea generalmente en controladores borrosos. En este caso, se expresa explícitamente que los valores cualitativos se representan mediante funciones (de distribución de posibilidad) que dependen de su correspondiente variable:

$\text{elevada}(\text{cantidad de CO}_2) \wedge \text{positiva}(\text{tendencia}) \vee \neg \text{clara}(\text{visibilidad}) \rightarrow \text{alta}(\text{potencia de ventilación}).$

Por último, la misma regla expresada mediante las funciones de distribución posibilidad que definen los valores cualitativos (o nítidos) que toman las variables (opción 4):

$\mu_{\text{elevada}}(\text{cantidad de CO}_2) \wedge \mu_{\text{positiva}}(\text{tendencia}) \vee \neg \mu_{\text{clara}}(\text{visibilidad}) \rightarrow \mu_{\text{alta}}(\text{potencia de ventilación}).$

Para cualquier número de cláusulas que compongan el antecedente de una regla borrosa, siempre es posible obtener la función de distribución de posibilidad, $\mu_p(x)$, con x vector, resultado de aplicar las operaciones t-norma T (conjunción), t-conorma S (disyunción) y negación N a las funciones de distribución de posibilidad asociadas a los valores cualitativos de las cláusulas del antecedente de la regla. Si fuera necesario, se deberían calcular previamente las correspondientes extensiones cilíndricas con el fin de operar distribuciones de posibilidad dependientes de las mismas variables. Teniendo esto en cuenta, no se pierde generalidad al expresar una regla borrosa como: $\mu_A(x) \rightarrow \mu_B(y)$, o en cualquiera de sus tres formas restantes.

Así pues, dada una base de conocimiento general formada por reglas borrosas de la forma $\mu_A(x) \rightarrow \mu_B(y)$, el proceso de razonamiento o inferencia en lógica borrosa consiste en calcular la función de distribución de posibilidad $\mu_{B'}(y)$ a partir de los hechos conocidos, expresados como $\mu_{A'}(x)$.

La lógica proposicional proporciona un mecanismo de inferencia en este sentido, el modus ponens, que se expresa como:

Regla: $A \rightarrow B$

Hecho: A

Resultado: B

Dada la regla cierta $A \rightarrow B$, si se puede afirmar que se cumple A (el hecho conocido), entonces se deduce que se cumple B .

En lógica borrosa, se puede generalizar el modus ponens, al no ser necesario que se cumpla exactamente A , sino que es suficiente con que haya una intersección no vacía entre el antecedente de la regla A y el hecho que se cumple A' , dado que ambos son conjuntos (borrosos). El modus ponens *generalizado* se podría notar como:

Regla: $A \rightarrow B$

Hecho: A'

Resultado: B'

Teniendo en cuenta que ahora (lógica borrosa) A , B , A' y B' son conjuntos borrosos, dada la regla $A \rightarrow B$, si no se cumple exactamente A , sino un hecho “parecido” A' (con intersección no vacía con A), no tiene porqué cumplirse exactamente B , sino una afirmación “parecida”, que se denomina B' . Empleando las funciones de distribución de posibilidad que definen los correspondientes conjuntos borrosos A , B , A' y B' , el modus ponens generalizado se puede expresar como:

Regla borrosa: $\mu_A(x) \rightarrow \mu_B(y)$

Hecho: $\mu_{A'}(x)$

Resultado: $\mu_{B'}(y)$

Dado que los conjuntos borrosos o etiquetas lingüísticas se definen mediante sus correspondientes funciones de distribución de posibilidad, es necesario, por tanto, un procedimiento que permita calcular la función de distribución de posibilidad resultado del proceso de inferencia, $\mu_{B'}(y)$, a partir de una base de conocimiento de reglas de la forma $\mu_A(x) \rightarrow \mu_B(y)$, conociendo que se cumple el hecho A' , representado por $\mu_{A'}(x)$. Este procedimiento se denomina **Regla Composicional de Inferencia (RCI)**. Se muestra a continuación cómo se obtiene la expresión de la regla composicional de inferencia para el caso de que la base de conocimiento esté formada por una única regla y se generaliza, posteriormente, al caso de bases de conocimiento con n reglas.

Sean X e Y dos conjuntos nítidos (clásicos) y una relación entre ambos, definida por la función $f(x)$ tal que $\forall x \in X$ se puede inferir $y \in Y$ porque $f(x) = y$:

$$f: X \rightarrow Y$$

$$x \rightarrow f(x)$$

Entonces, dado un subconjunto $A \subset X$, se puede inferir, mediante la función $f(x)$, $B \subset Y$ como: $B = \{ y \in Y / y = f(x), x \in A \}$. La figura 3.1 muestra gráficamente este proceso de inferencia:

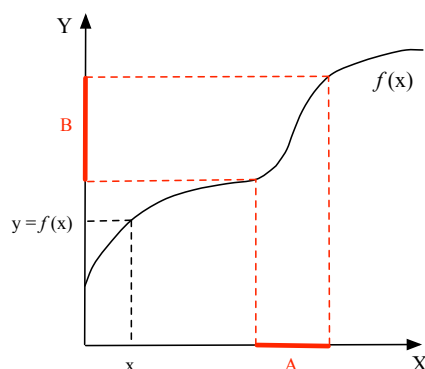


Figura 3.1. Inferencia del conjunto $B \subset Y$ a partir de $f(x)$ y $A \subset X$.

Sea R la relación entre los conjuntos X e Y definida en la figura 3.2, donde $x \in X$ está relacionado con $y \in Y$ mediante la relación R si, y sólo si, $\langle x, y \rangle \in R$. Dado el subconjunto $A \subset X$, se puede inferir el conjunto $B \subset Y$ mediante la relación R como $B = \{ y \in Y / \langle x, y \rangle \in R, x \in A \}$. La figura 3.2 muestra gráficamente este proceso de inferencia.

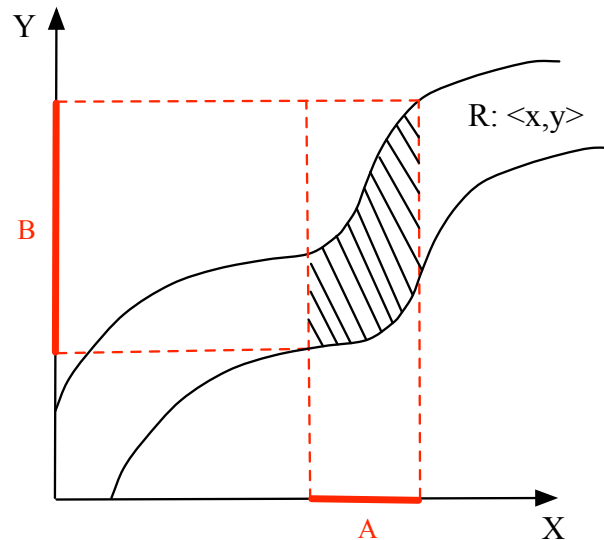


Figura 3.2. Inferencia del conjunto $B \subset Y$ a partir de R y $A \subset X$.

Se define la función característica de un conjunto $A \subset X$, y se nota por $P_A(x)$, a la siguiente función de pertenencia:

$$P_A: A \rightarrow \{0,1\}$$

$$x \rightarrow P_A(x)$$

$$P_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función característica $P_A(x)$ devuelve 1 si x pertenece al conjunto A , y devuelve 0 en otro caso. Por tanto, se puede pensar que es la versión nítida de la función de distribución de posibilidad $\mu_A(x)$. Sean A , B , la relación R y sus respectivas funciones características $P_A(x)$ y $P_R(x,y)$ definidas en la figura 3.3.a. El procedimiento para calcular $P_B(y)$ a partir de $P_A(x)$ y $P_R(x,y)$ es el siguiente, el cual se representa gráficamente en las figuras 3.3.b y 3.3.c:

1. Se proyecta la función característica $P_A(x)$ sobre el plano (x,y) . Es decir, se hace una extensión cilíndrica de $P_A(x)$ con y , obteniendo $P_A(x,y) / \forall y$ y $P_A(x,y) = P_A(x)$. En la figura 3.3.b se muestra una banda vertical de unos sobre el conjunto A .
2. Se calcula $\min(P_A(x,y), P_R(x,y)) / \forall (x,y)$. Gráficamente, la figura 3.3.c muestra una superficie con unos más gruesos en la intersección entre R y la banda vertical del conjunto A extendido con y .

3. El supremo (máximo valor de un conjunto) $\forall x$ del resultado anterior (Sup_x) devuelve como resultado, precisamente $P_B(y) = \text{Sup}_x \{ \min (P_A(x,y), P_R(x,y)) \}$, $\forall (x,y)$, lo cual se muestra en la figura 3.3.c.

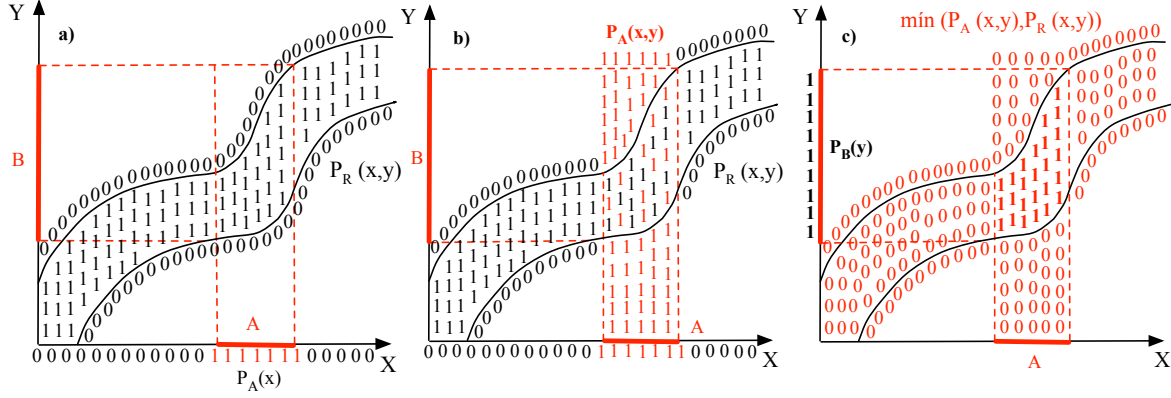


Figura 3.3. Proceso gráfico de cálculo de $P_B(y)$ a partir de $P_A(x)$ y $P_R(x,y)$. a) Representación de $P_A(x)$ y $P_R(x,y)$. b) Extensión de $P_A(x)$ con y , $P_A(x,y)$. c) $\min (P_A(x,y), P_R(x,y))$, que representa la intersección, y cálculo de $P_B(y)$.

Partiendo de la expresión obtenida en el paso 3 para el cálculo de $P_B(y)$, y generalizando las funciones características (funciones de pertenencia para conjuntos nítidos) a funciones de distribución de posibilidad, se tiene:

$$\mu_B(y) = \text{Sup}_x \{ \min (\mu_A(x,y), \mu_R(x,y)) \}, \forall (x,y)$$

La expresión $\min (\mu_A(x,y), \mu_R(x,y))$ proviene del cálculo de la intersección entre R y A extendido con y , lo cual se puede generalizar en lógica borrosa mediante el empleo de una t -norma, T , por tanto:

$$\mu_B(y) = \text{Sup}_x \{ T (\mu_A(x,y), \mu_R(x,y)) \}, \forall (x,y)$$

La relación R puede ser una relación de implicación en lógica borrosa en donde se hacen corresponder puntos del conjunto A con puntos del conjunto B :

$$\mu_B(y) = \text{Sup}_x \{ T (\mu_A(x,y), \mu_{A \rightarrow B}(x,y)) \}, \forall (x,y)$$

Dado que T representa la intersección entre conjuntos borrosos, $\mu_A(x,y)$ se puede generalizar como $\mu_{A'}(x,y)$, donde A y A' tienen intersección no vacía, es decir, $\exists (x,y) / \mu_A \wedge A' (x,y) \neq 0$. En ese caso, se obtiene $\mu_{B'}(y)$ en lugar de $\mu_B(y)$.

$$\mu_{B'}(y) = \text{Sup}_x \{ T (\mu_{A'}(x,y), \mu_{A \rightarrow B}(x,y)) \}, \forall (x,y)$$

Por último, en lugar de $\mu_{A'}(x,y)$, que sería lo ortodoxo, se suele notar como $\mu_{A'}(x)$ a la distribución de posibilidad del hecho conocido, que es como originalmente suele venir expresado en un problema de inferencia. Por tanto, hay que tener en cuenta que la operación $T (\mu_{A'}(x), \mu_{A \rightarrow B}(x,y))$ no es posible sin realizar previamente la extensión cilíndrica de $\mu_{A'}(x)$ con y . Obviando asimismo $\forall (x,y)$, dado que las operaciones con conjuntos borrosos se calculan siempre para todos los puntos del dominio de sus funciones de distribución de

posibilidad asociadas, la expresión para la regla composicional de inferencia, que permite calcular la función de distribución de posibilidad $\mu_{B'}(y)$ a partir de la regla $\mu_A(x) \rightarrow \mu_B(y)$ y del hecho, representado por $\mu_{A'}(x)$, es la siguiente:

$$\mu_{B'}(y) = \text{Sup}_x \{T(\mu_{A'}(x), \mu_{A \rightarrow B}(x,y))\}$$

a. Regla composicional de inferencia

A partir de la fórmula de la regla composicional de inferencia, se observa que es necesario realizar las siguientes operaciones en orden:

1. Cálculo de la implicación J para obtener la función de distribución de posibilidad $\mu_{A \rightarrow B}(x,y)$. Dado que la regla, en la base de conocimiento, tiene la forma (expresada mediante las distribuciones de posibilidad asociadas a los valores cualitativos) $\mu_A(x) \rightarrow \mu_B(y)$, no es posible operar directamente J ($\mu_A(x)$, $\mu_B(y)$) puesto que estas dos funciones de distribución de posibilidad no están expresadas en función de la misma variable. Por ello:
 - a. Se calcula la extensión cilíndrica de $\mu_A(x)$ con y para obtener $\mu_A(x,y)$.
 - b. Se calcula la extensión cilíndrica de $\mu_B(y)$ con x para obtener $\mu_B(x,y)$.
 - c. Se calcula J ($\mu_A(x,y)$, $\mu_B(x,y)$), para obtener $\mu_{A \rightarrow B}(x,y)$, empleando para ello la función de implicación J elegida para el sistema inteligente construido.
2. Cálculo de la t-norma T ($\mu_{A'}(x)$, $\mu_{A \rightarrow B}(x,y)$). De nuevo, dado que la distribución de posibilidad del hecho conocido, $\mu_{A'}(x)$, no está expresado en función de las mismas variables que $\mu_{A \rightarrow B}(x,y)$, es necesario:
 - a. Calcular la extensión cilíndrica de $\mu_{A'}(x)$ con y, para obtener $\mu_{A'}(x,y)$.
 - b. Calcular T ($\mu_{A'}(x,y)$, $\mu_{A \rightarrow B}(x,y)$) = $\mu_{A' \wedge (A \rightarrow B)}(x,y)$, empleando la función t-norma definida en el sistema basado en el conocimiento construido.
3. Cálculo del $\text{Sup}_x \{\mu_{A' \wedge (A \rightarrow B)}(x,y)\} = \mu_{B'}(y)$.

b. Motor de inferencia borroso: generalización a n reglas

Hasta ahora, todo el desarrollo de inferencia con lógica borrosa, se ha realizado suponiendo que la base de conocimiento consta de una única regla, expresada mediante funciones de distribución de posibilidad, de la forma $\mu_A(x) \rightarrow \mu_B(y)$. Si bien la forma de expresar la regla se puede considerar general, dado que siempre es posible operar (o, en su caso, componer) todas las cláusulas existentes en el antecedente de la regla, no lo es el hecho de que haya una única regla en la base de conocimiento del sistema inteligente. Por ello, se considera ahora un sistema inteligente basado en reglas borrosas con la siguiente base de n reglas generales expresadas mediante funciones de distribución de posibilidad:

$$R_1: \mu_{A1}(x) \rightarrow \mu_{B1}(y)$$

$$R_2: \mu_{A2}(x) \rightarrow \mu_{B2}(y)$$

....

$$R_n: \mu_{An}(x) \rightarrow \mu_{Bn}(y)$$

Se supone, además que el hecho conocido es A' , definido como $\mu_{A'}(x)$, y se desea averiguar $\mu_{B'}(y)$. Para ello:

1. Se aplica la regla composicional de inferencia a cada regla R_i :

$$\mu_{Bi'}(y) = \sup_x \{T(\mu_{A'}(x), \mu_{Ai \rightarrow Bi}(x,y))\}$$

Obteniéndose $\mu_{B1'}(y)$, $\mu_{B2'}(y)$, ..., $\mu_{Bn'}(y)$. Si para alguna regla R_i ocurre que $T(\mu_{A'}(x), \mu_{Ai \rightarrow Bi}(x,y)) = 0, \forall x, y$ (nótese la necesidad de realizar previamente la extensión cilíndrica de $\mu_{A'}(x)$ con y), se obtiene como resultado que $\mu_{Bi'}(y) = 0, \forall y$. Dicho de otro modo, la regla no se dispara. Por tanto, R_i no tiene influencia en el resultado final del proceso de inferencia.

2. Se calcula la función de distribución final $\mu_{B'}(y)$ mediante la aplicación de la función t-conorma S definida en el sistema inteligente a las funciones de distribución de posibilidad obtenidas en el paso anterior $\mu_{B1'}(y)$, $\mu_{B2'}(y)$, ..., $\mu_{Bn'}(y)$. Se puede aplicar en cualquier orden, dado que la t-conorma cumple las propiedades asociativa y conmutativa. No es necesario calcular la extensión cilíndrica porque todas las $\mu_{Bi'}(y)$ dependen de la misma variable y .

$$\mu_{B'}(y) = S(\mu_{B1'}(y), S(\mu_{B2'}(y), \dots, S(\mu_{Bn'}(y)))) = \bigcup_{\forall i=1..n} \mu_i(y)$$

c. Ejemplo

Se desea construir un sistema inteligente basado en lógica borrosa que permita la estimación del precio de la carrera de un taxi en función de la distancia recorrida. Para ello, inicialmente, se manejan las siguientes variables:

- D: distancia recorrida con el taxi, con posibles valores: corta (Co), normal (No), alrededor de 30 (~30), larga (L) y muy larga (ML). Su intervalo de valores es $[0,100]$ Km.
- P: precio de la carrera, con posibles valores: barato (B), normal (N) y caro (C). Su intervalo de valores es $[0, 50]$ €.

Los valores cualitativos de estas variables tienen asociadas las funciones de distribución de posibilidad mostradas en la figura 3.4. Para representar el conocimiento existente acerca del dominio de trabajo, se dispone actualmente de una base de conocimiento formada por una única regla:

$$R_1: \text{distancia} = \text{larga} \rightarrow \text{precio} = \text{caro}$$

$$R_1: \mu_{\text{larga}}(D) \rightarrow \mu_{\text{caro}}(P)$$

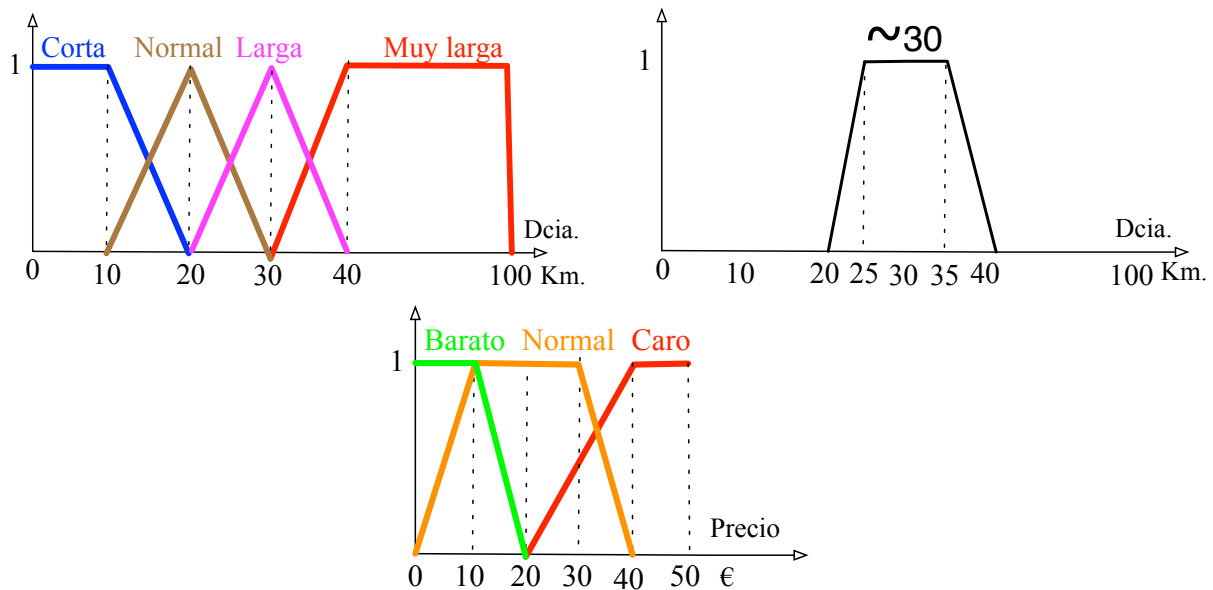


Figura 3.4. Funciones de distribución de posibilidad asociadas a los valores cualitativos de las variables D (distancia) y P (precio).

Se pide: suponiendo que se desea tomar un taxi para recorrer una distancia de alrededor de 30 Km. ($D = \sim 30$), definido por $\mu_{\sim 30}$ (distancia), aplicar la regla composicional de inferencia (RCI) con la t-norma y t-conorma de Zadeh para estimar los valores numérico y cualitativo del precio que costará la carrera.

SOLUCION:

Se muestran a continuación los operadores a utilizar, teniendo en cuenta que el enunciado indica que se deben utilizar la t-norma y t-conorma de Zadeh y, por tanto, una de las dos funciones de implicación J que se deducen de ellas. Así, $\forall x$, con \tilde{x} , \tilde{y} dos funciones de distribución de posibilidad generales, $\mu_p(x)$ y $\mu_q(x)$ respectivamente:

- $T(\tilde{x}, \tilde{y}) = \min(\tilde{x}, \tilde{y})$.
- $S(\tilde{x}, \tilde{y}) = \max(\tilde{x}, \tilde{y})$.
- $N(\tilde{x}) = 1 - \tilde{x}$.
- $J(\tilde{x}, \tilde{y}) = \max(1 - \tilde{x}, \tilde{y})$, que es una de las funciones de implicación que se deducen.

Dado que el ejercicio maneja únicamente dos variables, P y D, se podría resolver de forma gráfica, lo cual daría como resultado un resultado exacto. Sin embargo, el procedimiento gráfico sólo es válido en problemas donde, como éste, se manejan dos variables, no siendo, por tanto, general. Por el contrario, se opta por un desarrollo tabular que, si bien es inexacto por tener que discretizar las funciones de distribución de posibilidad (continuas) es válido para cualquier número de variables.

La elección de los intervalos de discretización (**regulares**) de las funciones de distribución de posibilidad es un asunto importante. Si se elige un radio para los intervalos de discretización demasiado grande, se obtiene una solución demasiado inexacta. Por el contrario, la elección de un radio pequeño, proporciona un resultado más preciso, pero con un

mayor coste computacional. En el ejemplo propuesto, se ha elegido un radio para los intervalos de discretización de 5 Km. para el caso de la variable D, y de 10 € para P.

La tabla 3.1 muestra el resultado de aplicar la regla composicional de inferencia al caso propuesto en el problema. Las dos primeras columnas muestran, respectivamente, los valores numéricos en donde se discretizan las funciones de distribución de posibilidad que dependen de las variables P y D, denominados puntos de discretización. Las columnas 3 y 4, $\mu_{\text{larga}}(D,P)$ y $\mu_{\text{caro}}(D,P)$, muestran los valores de posibilidad en cada uno de los puntos de discretización. Para poder calcular $\mu_{\text{larga} \rightarrow \text{caro}}(D,P)$, es necesario hacer las extensiones cilíndricas de $\mu_{\text{larga}}(D)$ con P y $\mu_{\text{caro}}(P)$ con D para obtener, respectivamente, $\mu_{\text{larga}}(D,P)$ y $\mu_{\text{caro}}(D,P)$. En el caso de $\mu_{\text{larga}}(D,P)$, la extensión cilíndrica se representa en la tabla mediante la repetición de los valores de posibilidad en todas las celdas de la columna $\mu_{\text{larga}}(D,P)$ para cada uno de los valores de precio (P). Efectivamente, si la extensión cilíndrica significa, por definición, que $\forall P \mu_{\text{larga}}(D,P) = \mu_{\text{larga}}(D)$, es necesario copiar los valores de posibilidad de $\mu_{\text{larga}}(D)$ de cada punto de discretización de D en todos los puntos de discretización de P. En el caso de $\mu_{\text{caro}}(D,P)$, que sólo depende de precio, bastaría con anotar en la cuarta columna, $\mu_{\text{caro}}(D,P)$, para cada punto de discretización de D, el único valor de posibilidad correspondiente al punto de discretización de P.

A partir de $\mu_{\text{larga}}(D,P)$ y $\mu_{\text{caro}}(D,P)$, es posible calcular $\mu_{\text{larga} \rightarrow \text{caro}}(D,P)$ para cada valor de posibilidad de las columnas $\mu_{\text{larga}}(D,P)$ y $\mu_{\text{caro}}(D,P)$. El resultado se muestra en la quinta columna, empleando para ello $J(\hat{x}, \hat{y}) = \max(1 - \hat{x}, \hat{y})$, $\forall D, P$, tal y como se deduce del enunciado. En este caso, $\hat{x} \equiv \mu_{\text{larga}}(D,P)$, e $\hat{y} \equiv \mu_{\text{caro}}(D,P)$. Por ejemplo, para $D = 25$ y $P = 0$, se tiene que $\mu_{\text{larga}}(25, 0) = 0,5$ y $\mu_{\text{caro}}(25, 0) = 0$. Entonces, $J(\mu_{\text{larga}}(25, 0), \mu_{\text{caro}}(25, 0)) = \max(1 - 0,5, 0) = 0,5$, que es el resultado mostrado en la sexta fila de la primera celda de la quinta columna.

La sexta columna representa los valores de posibilidad de $\mu_{\sim 30}(D)$, extendido cilíndricamente con P, de forma similar al caso de $\mu_{\text{larga}}(D,P)$ en la tercera columna. Dado que $\mu_{\text{larga} \rightarrow \text{caro}}(D,P)$ y la extensión cilíndrica de $\mu_{\sim 30}(D)$ con P, mostrada en la columna sexta, dependen de las mismas variables D y P, es posible calcular la t-norma de ambas funciones mediante la expresión indicada en el enunciado: $T(\hat{x}, \hat{y}) = \min(\hat{x}, \hat{y})$, $\forall D, P$. El resultado se muestra en la columna séptima, llamada T. De nuevo, en el caso de la sexta fila de la primera celda de la columna T, se tiene: $T(\mu_{\text{larga} \rightarrow \text{caro}}(25,0), \mu_{\sim 30}(25,0)) = \min(0,5, 1) = 0,5$.

Finalmente, la última columna muestra los valores de posibilidad de la función de distribución resultado $\mu_{B'}(P)$ para cada uno de los puntos de discretización elegidos para la variable P. Para ello, se calcula, para cada valor de P, el máximo de las posibilidades de la función T (columna anterior), para todo D (Sup_D). En el caso de la primera celda de la última columna, el valor 0,5 es el máximo valor de posibilidad de T para $P = 0$ y cualquier valor de D, es decir, $\text{Sup}_D(T(D, 0)) = 0,5$.

Tabla 3.1. Resultado de aplicar la regla composicional de inferencia al ejemplo propuesto.

P: Precio	D: Distancia	$\mu_{\text{larga}}(D,P)$	$\mu_{\text{caro}}(D,P)$	$\mu_{\text{larga} \rightarrow \text{caro}}(D,P)$	$\mu_{\sim 30}(D,P)$	T	SupD: $\mu_B(P)$
0	0	0	0	1	0	0	0,5
	5	0	0	1	0	0	
	10	0	0	1	0	0	
	15	0	0	1	0	0	
	20	0	0	1	0	0	
	25	0,5	0	0,5	1	0,5	
	30	1	0	0	1	0	
	35	0,5	0	0,5	1	0,5	
	40	0	0	1	0	0	
	45	0	0	1	0	0	
	50	0	0	1	0	0	
	
	100	0	0	1	0	0	
10	0	0	0	1	0	0	0,5
	5	0	0	1	0	0	
	10	0	0	1	0	0	
	15	0	0	1	0	0	
	20	0	0	1	0	0	
	25	0,5	0	0,5	1	0,5	
	30	1	0	0	1	0	
	35	0,5	0	0,5	1	0,5	
	40	0	0	1	0	0	
	45	0	0	1	0	0	
	50	0	0	1	0	0	
	
	100	0	0	1	0	0	
20	0	0	0	1	0	0	0,5
	5	0	0	1	0	0	
	10	0	0	1	0	0	
	15	0	0	1	0	0	
	20	0	0	1	0	0	
	25	0,5	0	0,5	1	0,5	
	30	1	0	0	1	0	
	35	0,5	0	0,5	1	0,5	
	40	0	0	1	0	0	
	45	0	0	1	0	0	
	50	0	0	1	0	0	
	
	100	0	0	1	0	0	
30	0	0	0,5	1	0	0	0,5
	5	0	0,5	1	0	0	
	10	0	0,5	1	0	0	
	15	0	0,5	1	0	0	
	20	0	0,5	1	0	0	
	25	0,5	0,5	0,5	1	0,5	
	30	1	0,5	0,5	1	0,5	
	35	0,5	0,5	0,5	1	0,5	
	40	0	0,5	1	0	0	
	45	0	0,5	1	0	0	
	50	0	0,5	1	0	0	
	
	100	0	0,5	1	0	0	

P: Precio	D: Distancia	$\mu_{\text{larga}}(D,P)$	$\mu_{\text{caro}}(D,P)$	$\mu_{\text{larga} \rightarrow \text{caro}}(D,P)$	$\mu_{\sim 30}(D,P)$	T	Sup $\mu_{B'}(P)$
40	0	0	1	1	0	0	1
	5	0	1	1	0	0	
	10	0	1	1	0	0	
	15	0	1	1	0	0	
	20	0	1	1	0	0	
	25	0,5	1	1	1	1	
	30	1	1	1	1	1	
	35	0,5	1	1	1	1	
	40	0	1	1	0	0	
	45	0	1	1	0	0	
	50	0	1	1	0	0	
	
	100	0	1	1	0	0	
50	0	0	1	1	0	0	1
	5	0	1	1	0	0	
	10	0	1	1	0	0	
	15	0	1	1	0	0	
	20	0	1	1	0	0	
	30	0,5	1	1	1	1	
	35	1	1	1	1	1	
	40	0,5	1	1	1	1	
	45	0	1	1	0	0	
	50	0	1	1	0	0	
	...	0	1	1	0	0	
	100	
		0	1	1	0	0	

La figura 3.5a. muestra gráficamente los valores de posibilidad de $\mu_{B'}(P)$ en los puntos de discretización de P, obtenidos como resultado de aplicar la regla composicional de inferencia, tal y como se observa en la última columna de la tabla 3.1. La figura 3.5.b muestra gráficamente $\mu_{B'}(P)$ después de unir los valores de posibilidad mediante rectas (interpolación mediante polinomios de primer grado). Nótese que cuanto mayor sea el número de puntos de discretización, más precisa es la función $\mu_{B'}(P)$ que se obtiene como resultado, aunque como consecuencia de un mayor número de cálculos.

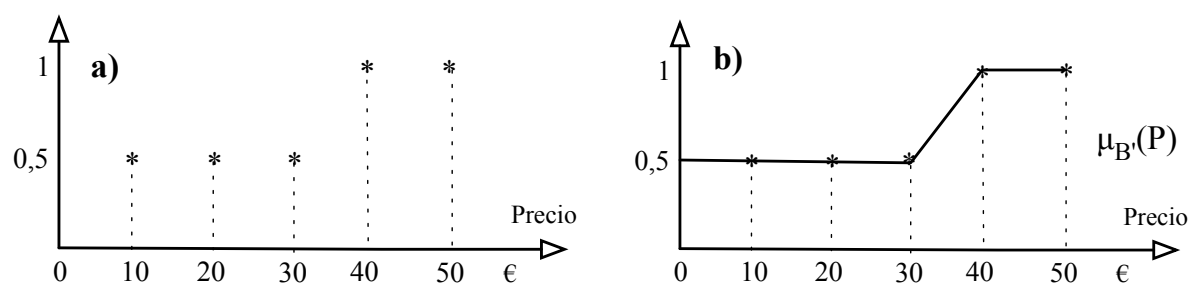


Figura 3.5. Representación gráfica de $\mu_{B'}(P)$, resultado de aplicar la RCI.

d. Proceso de interpretación del resultado

El resultado obtenido en el ejercicio anterior, $\mu_{B'}(P)$, debe ser interpretado. Se debe saber cuál es la semántica del resultado, cuánto costará el taxi si se recorre una distancia de alrededor de 30 Km. ($D = \sim 30$). De hecho, en el ejercicio se pide que se estimen los valores numérico y cualitativo del precio que costará la carrera. Por tanto, es necesario convertir la

función de distribución de posibilidad obtenida como resultado del proceso de inferencia en un valor numérico o un valor cualitativo de entre los conocidos: barato (B), normal (N) o caro (C). Este proceso de conversión, ya sea en un valor numérico o cualitativo, se denomina en inglés *defuzzify*, que se podría españolizar usando el barbarismo *desborrocificación*, que no existe. Otra opción es realizar una traducción libre del término en base a su semántica en el dominio de la lógica borrosa: *interpretar* o *convertir*.

Existen diversos procedimientos para convertir una función de distribución de posibilidad en un valor numérico o cualitativo. Para el primer caso, se describe el método del centro de gravedad g_B . Para el cálculo de valores cualitativos, se exponen los métodos de la distancia y \sum_{cuenta} , leído como “sigma cuenta”.

El método del centro de gravedad convierte una función de distribución de posibilidad en un valor numérico a partir, precisamente, del cálculo de su centro de gravedad. Dada una función de distribución de posibilidad genérica $\mu_p(x)$ y un conjunto de puntos de discretización de la función $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, elegidos, recuerde, de forma que sean equidistantes, el centro de gravedad de $\mu_p(x)$ se define como:

$$g_p = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \mu_p(x_i)}{\sum_{i=1}^n \mu_p(x_i)}$$

En el caso del ejemplo de la figura 3.5, el centro de gravedad de $\mu_B(P)$, que permite calcular el valor numérico del precio de una carrera de alrededor de 30 Km. de distancia, se calcula de la siguiente forma, teniendo en cuenta que se toma un punto de discretización cada 10 €.

$$g_{B'} = \frac{0 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,5 + 40 \cdot 1 + 50 \cdot 1}{0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 1 + 1} = \frac{120}{4} = 30\text{€}$$

Es decir, si se recorre una distancia de alrededor de 30 Km., el taxi costará 30 €. Si esta predicción coincide con la realidad, el sistema basado en el conocimiento está bien construido para este caso. Por el contrario, si el resultado es erróneo, es necesario corregir el sistema inteligente modificando la base de reglas, las funciones T, S, N y J, las funciones de distribución de posibilidad o el método de conversión a valores numéricos. La figura 3.6 muestra gráficamente el centro de gravedad de $\mu_B(P)$.

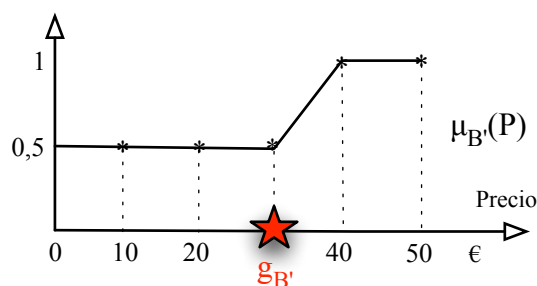


Figura 3.6. Centro de gravedad, $g_{B'}$, de $\mu_{B'}(P)$.

Es importante tener en cuenta que, tal y como se define en el ejercicio propuesto en la sección 3.c, los valores numéricos de la variable precio $\in [0,50]$ €. Es decir, tanto el 0 como el 50 pertenecen al intervalo, son valores que la variable puede tomar. Por esa razón, estos dos valores deben ser incluidos en el cálculo del centro de gravedad de $\mu_{B'}(P)$. No sólo eso, sino que, además, su inclusión influye en el resultado final: si bien es cierto que el valor 0 no influye en el resultado del numerador para el cálculo del centro de gravedad, si $x_i = 0$, $x_i \cdot \mu_p(x_i) = 0$, no ocurre lo mismo en el caso del denominador, en el ejemplo, $\mu_p(x_i) = 0,5$ para $x_i = 0$.

El método de la distancia devuelve el valor cualitativo A_i , de entre los conocidos o definidos en el dominio de valores cualitativos de la variable en cuestión (en el ejemplo: barato, normal o caro), cuya función de distribución de posibilidad se *parece* más a la función de distribución de posibilidad obtenida como consecuencia de un proceso de inferencia en lógica borrosa, notada como $\mu_{B'}(x)$. Para ello, se define una distancia entre dos funciones de distribución de posibilidad que mide la *similitud* o grado de *parecido* entre ellas. Este método consiste en calcular la distancia de $\mu_{B'}(x)$ a cada una de las funciones de distribución de posibilidad definidas para cada valor cualitativo de la variable x , devolviendo como resultado aquél A_i cuya función de distribución de posibilidad minimiza $d(\mu_{B'}(x), \mu_{A_i}(x)) \forall i$.

¿Cuándo podemos decir que dos distribuciones de posibilidad, $\mu_{B'}(x)$ y $\mu_{A_i}(x)$, son *parecidas*?. Una posible respuesta es: cuando sus correspondientes centros de gravedad sean *cercanos*. Efectivamente, las figuras 3.7.a y 3.7.b muestran, respectivamente, el caso de dos distribuciones de posibilidad *parecidas* (con centros de gravedad similares) y dos distribuciones de posibilidad que no lo son. Sin embargo, esta medida no es suficiente como se puede observar en la figura 3.7.c donde las dos distribuciones de posibilidad tienen el mismo centro de gravedad, pero no se pueden considerar que sean *parecidas*.

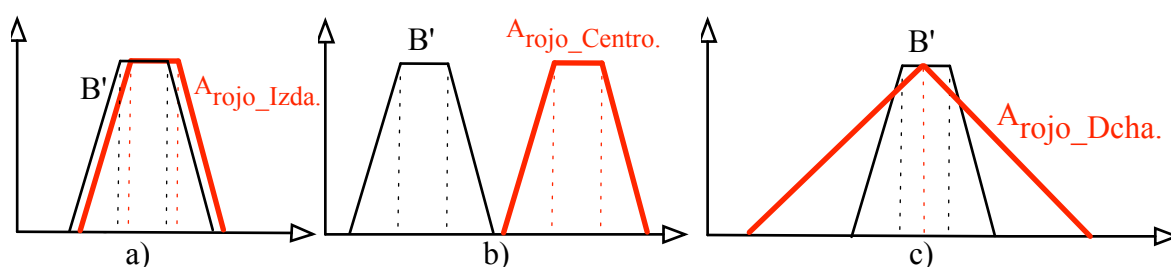


Figura 3.7.a) dos funciones de distribución de posibilidad *parecidas* con centros de gravedad similares. **b)** dos funciones de distribución de posibilidad que no son *parecidas*, al igual que sus centros de gravedad. **c)** dos funciones de distribución de posibilidad que no siendo *parecidas*, tienen el mismo centro de gravedad.

A partir de la figura 3.7, sobre todo en el caso c), se observa que el cálculo de los centros de gravedad no es una medida suficiente para medir el *grado de parecido* o distancia entre dos funciones de distribución de posibilidad. Se podría pensar que las dos distribuciones de la figura 3.7.c no son *parecidas* porque la medida de sus áreas son muy dispares. Pero la medida del área de una distribución de posibilidad tampoco es suficiente, como se puede observar en el caso de la figura 3.7.b, donde las dos distribuciones tienen el mismo área, pero no son *parecidas*.

Se puede entonces pensar en una medida de distancia entre dos funciones de distribución de posibilidad $d(\mu_{B'}(x), \mu_{A_i}(x))$ que combine tanto su centro de gravedad como su área. En este caso, dos funciones de distribución de posibilidad son cercanas entre sí (o *parecidas*), están a corta distancia, si tanto sus centros de gravedad como sus áreas son similares. Efectivamente, en este caso, las distribuciones de la figura 3.7.a son cercanas y, por tanto, *parecidas*, mientras que las funciones de las figuras 3.7.b y 3.7.c no lo son. Una fórmula para la distancia $d(\mu_{B'}(x), \mu_{A_i}(x))$ que tenga en cuenta estos dos aspectos puede ser la siguiente:

$$d(\mu_{B'}(x), \mu_{A_i}(x)) = \sqrt{\alpha \cdot (g_{B'} - g_{A_i})^2 + \beta \cdot (A_{B'} - A_{A_i})^2}$$

Donde $A_{B'}$ y A_{A_i} representan, respectivamente, el área de las funciones de distribución de posibilidad $\mu_{B'}(x)$ y $\mu_{A_i}(x)$, correspondientes a B' y A_i . $g_{B'}$ y g_{A_i} son, respectivamente, sus centros de gravedad. Por último, α y β son dos factores de ponderación de la influencia que tienen los centros de gravedad y áreas de las distribuciones de posibilidad en el resultado final del cálculo de la distancia entre ambas: $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha + \beta = 1$.

En el caso del ejemplo de la sección 3.c, se deben calcular las distancias de la función de distribución de posibilidad obtenida como resultado de la RCI a cada una de las tres distribuciones de posibilidad definidas para los valores cualitativos incluidos en el dominio de la variable precio (P): barato (B), normal (N) y caro (C). Se obtiene como resultado el valor cualitativo cuya función de distribución de posibilidad minimiza la distancia a $\mu_{B'}(P)$. Para ello, se calculan, en primer lugar, los centros de gravedad de cada una de las cuatro distribuciones de posibilidad (tomando un punto de discretización cada 10 €).

1. $g_{B'} = 30$, calculado anteriormente.
2. $g_B = (0 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 20 \cdot 0) / (1 + 1 + 0) = 5$.
3. $g_N = (0 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 40 \cdot 0) / (0 + 1 + 1 + 1 + 0) = 20$.
4. $g_C = (20 \cdot 0 + 30 \cdot 0,5 + 40 \cdot 1 + 50 \cdot 1) / (0 + 0,5 + 1 + 1) = 42$.

A continuación, se calculan las áreas de cada una de las cuatro distribuciones de posibilidad. Para ello, se particiona la superficie de cada función distribución de posibilidad en figuras geométricas cuyo área sea sencilla de calcular. Por ejemplo, triángulos o cuadrados. El área de la función de distribución de posibilidad es el sumario de las áreas de las figuras geométricas que conforman la partición. Se muestra, en la figura 3.8, a modo de ejemplo, una partición de la superficie de $\mu_{B'}(P)$, que consta de dos rectángulos y un triángulo cuyas áreas son $A_{B'1} = 25$, $A_{B'2} = 5$ y $A_{B'3} = 2,5$ respectivamente. Por tanto, $A_{B'} = 32,5$.

1. $A_{B'} = 25 + 5 + 2,5 = 32,5$ ($A_{B'1} + A_{B'2} + A_{B'3}$).
2. $A_B = 10 + 5 = 15$ ($A_B \text{ rectángulo} + A_B \text{ triángulo}$).
3. $A_N = 5 + 30 + 5 = 40$. ($A_N \text{ triángulo1} + A_N \text{ rectángulo} + A_N \text{ triángulo2}$).
4. $A_C = 10 + 10 = 20$ ($A_C \text{ triángulo} + A_C \text{ rectángulo}$).

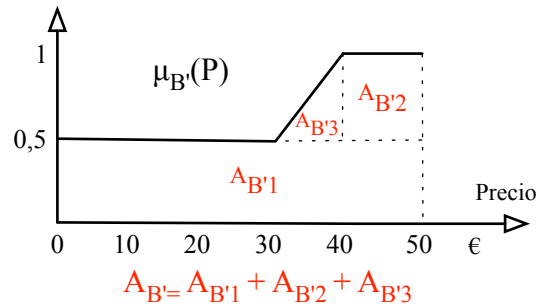


Figura 3.8. Cálculo del área de una función de distribución de posibilidad.

Por último, se calculan las distancias de $\mu_{B'}(P)$ a cada una de las tres distribuciones de posibilidad conocidas, tomando, por ejemplo, $\alpha = 0,6$ y $\beta = 0,4$ para dar mayor peso (importancia) al centro de gravedad frente al área en el cálculo de la medida de *parecido* (distancia) entre dos funciones de distribución de posibilidad:

$$d(\mu_{B'}(P), \mu_B(P)) = 0,6 \cdot (30-5)^2 + 0,4 \cdot (32,5-15)^2 = 375 + 122,5 = 497,5$$

$$d(\mu_{B'}(P), \mu_N(P)) = 0,6 \cdot (30-20)^2 + 0,4 \cdot (32,5-40)^2 = 60 + 22,5 = 82,5$$

$$d(\mu_{B'}(P), \mu_C(P)) = 0,6 \cdot (30-42)^2 + 0,4 \cdot (32,5-20)^2 = 86,4 + 62,5 = 148,9$$

Se ha omitido el cálculo de las raíces cuadradas, dado que no es necesario calcular exactamente el valor de cada una de las distancias, sino únicamente valores aproximados a efectos de comparar unas distancias con otras para elegir la menor. En este caso, la distancia menor es $d(\mu_{B'}(P), \mu_N(P))$, es decir, $\mu_N(P)$ está más cerca (se parece más) a $\mu_{B'}(P)$. Por tanto, **la respuesta** que debe dar el sistema basado en el conocimiento, en **términos cualitativos**, a la pregunta planteada en el ejemplo del apartado 3.c es que el precio del taxi será **normal**, que es el valor incluido en el dominio de valores cualitativos de la variable precio (P) cuya función de distribución de posibilidad es $\mu_N(P)$.

El uso del método de la distancia para calcular a qué función de distribución de posibilidad (valor cualitativo) de las conocidas se *parece* más la distribución de posibilidad obtenida como resultado de un proceso de inferencia en lógica borrosa, notado como $\mu_{B'}(x)$, tiene de un coste elevado en términos de carga computacional o número de cálculos a realizar. Aun obviando el cálculo de la raíz cuadrada, es necesario determinar cuáles son las áreas de todas las funciones de distribución de posibilidad implicadas, sus centros de gravedad y calcular la suma de las diferencias al cuadrado.

El método de la \sum_{cuenta} (leído como *sigma-cuenta*) tiene el mismo objetivo que el método de la distancia: devolver el valor cualitativo A_i , de entre los definidos en el dominio de la variable en cuestión, cuya función de distribución de posibilidad se *parezca* más a la distribución de posibilidad obtenida como consecuencia de un proceso de inferencia en lógica borrosa, notado como $\mu_{B'}(x)$. Sin embargo, requiere de un menor coste computacional porque está basado en el cálculo de **estimaciones** de las áreas de las funciones de distribución y cercanía de los centros de gravedad. Por tanto, la \sum_{cuenta} emplea los mismo criterios que el método de la distancia para establecer el grado de *parecido* o *similitud* entre dos funciones de

distribución de posibilidad, área y centro de gravedad, pero con menor coste computacional porque calcula estimaciones y no valores exactos.

Se define la \sum_{cuenta} de una función de distribución de posibilidad $\mu_A(x)$, y se nota como $\sum_{\text{cuenta}}(A)$:

$$\sum_{\text{cuenta}}(A) = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)$$

Donde $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es el conjunto de puntos de discretización de la función, elegidos de forma que sean equidistantes entre sí. La $\sum_{\text{cuenta}}(A)$ se puede considerar una estimación del área de la función de distribución de posibilidad $\mu_A(x)$, dado que suma las alturas (valores de posibilidad) de la función de distribución de posibilidad $\mu_A(x)$ en cada uno de los puntos de discretización x_i . El término estimación no viene dado porque $\sum_{\text{cuenta}}(A) \approx A_A$, sino porque, dadas dos funciones de distribución de posibilidad $\mu_{A1}(x)$, $\mu_{A2}(x)$ / $A_{A1} < A_{A2} \rightarrow \sum_{\text{cuenta}}(A_1) \approx \sum_{\text{cuenta}}(A_2)$.

Tomando como ejemplo las funciones de distribución de posibilidad $\mu_B(P)$, $\mu_N(P)$, $\mu_C(P)$ y $\mu_{B'}(P)$ que representan los diferentes valores cualitativos de precios de desplazamientos en taxi del ejemplo planteado en la sección 3.c, se tiene que los valores exactos para las áreas, ordenadas de menor a mayor son (calculadas en la resolución del ejercicio con el método de la distancia): $A_B = 15$; $A_C = 20$; $A_{B'} = 32,5$; $A_N = 40$. Se calculan a continuación, a modo de ejemplo, la \sum_{cuenta} de cada una de estas funciones para observar cómo, efectivamente, se mantiene, aproximadamente, el mismo orden (se ha tomado un punto de discretización cada 10 €):

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cuenta}}(B) &= 1 + 1 + 0 = 2; & \sum_{\text{cuenta}}(C) &= 0 + 0,5 + 1 + 1 = 2,5. \\ \sum_{\text{cuenta}}(B') &= 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 1 + 1 = 4; & \sum_{\text{cuenta}}(N) &= 0 + 1 + 1 + 1 + 0 = 3. \end{aligned}$$

La distancia entre los centros de gravedad de dos funciones de distribución de posibilidad $\mu_{A1}(x)$ y $\mu_{A2}(x)$ se podría estimar, inversamente, como la \sum_{cuenta} de la intersección de sus valores cualitativos asociados (o conjuntos borrosos). Es decir, $\sum_{\text{cuenta}}(A_1 \wedge A_2)$. En el ejemplo de la figura 3.7, las funciones de distribución de posibilidad de los casos a) y c) tienen sus centros de gravedad cercanos (su distancia es prácticamente nula o cero). En estos dos casos, la \sum_{cuenta} de la intersección de sus valores cualitativos asociados, que se puede interpretar como el área de la función de distribución de posibilidad resultado de la intersección, es elevada, por lo que se asume que la distancia entre sus centros de gravedad es pequeña. Por el contrario, la distancia entre los centros de gravedad de las dos funciones de distribución de posibilidad de la figura 3.7.b es elevada. En este caso, la \sum_{cuenta} de la intersección de sus valores cualitativos asociados es cero porque dicha intersección es vacía.

Según el razonamiento anterior, el valor cualitativo A_i cuya función de distribución de posibilidad se *parece* más a la función de distribución de posibilidad obtenida como consecuencia de un proceso de inferencia en lógica borrosa (RCI) $\mu_{B'}(x)$, debería ser aquél que maximice la expresión $\sum_{\text{cuenta}}(B' \wedge A_i)$, $\forall A_i$. Sin embargo, en los ejemplos de la figura 3.7, donde se supone que las funciones de distribución de posibilidad del caso a) se *parecen*

más que las del caso c), podría ocurrir que $\sum_{\text{cuenta}}(B' \wedge A_{\text{Rojo_Izda.}}) < \sum_{\text{cuenta}}(B' \wedge A_{\text{Rojo_Dcha.}})$. Es decir, que la \sum_{cuenta} de la intersección de los valores cualitativos asociados sea mayor en el caso de las funciones de distribución de posibilidad del ejemplo de la figura 3.7.c que en el caso de la figura 3.7.a. De hecho, esto es lo que parece ocurrir a simple vista.

Este error se produce porque $A_{\text{Rojo_Izda.}} \ll A_{\text{Rojo_Dcha.}}$. Cuanto mayor es el área de una función de distribución de posibilidad, mayor oportunidad tiene su correspondiente valor cualitativo o conjunto borroso de intersecar con cualquier otra. El área $A_{\text{Rojo_Dcha.}}$ en la figura 3.7.c es tan grande que prácticamente abarca todo el dominio de x . En esas condiciones, es lógico pensar que el área de la función de distribución de posibilidad resultado de la intersección de Rojo_Dcha. con B' sea elevada. Por tanto, para calcular el grado de *parecido* entre dos funciones de distribución de posibilidad $\mu_{B'}(x)$ y $\mu_{A_i}(x)$, no sólo basta con calcular $\sum_{\text{cuenta}}(B' \wedge A_i)$, sino que también es necesario tener en cuenta, de forma inversamente proporcional, el área de la función de distribución de posibilidad de A_i , o bien, una estimación de ésta, es decir, $\sum_{\text{cuenta}}(A_i)$. Como conclusión, dos funciones de distribución de posibilidad, $\mu_{B'}(x)$ y $\mu_{A_i}(x)$, son parecidas cuanto más elevado sea el área de la intersección de sus correspondientes valores cualitativos (conjuntos borrosos) A_i y B' , y más pequeña el área de la función de distribución de posibilidad con la que se compara, $\mu_{A_i}(x)$. Es decir, $\mu_{B'}(x)$ se *parece* más a aquella $\mu_{A_i}(x) \forall A_i$ que maximice $\sum_{\text{cuenta}}(A_i / B')$:

$$\sum_{\text{cuenta}}(A_i / B') = \frac{\sum_{\text{cuenta}}(B' \wedge A_i)}{\sum_{\text{cuenta}}(A_i)}$$

Siendo $\mu_{A_i}(x)$ cada una de las funciones de distribución de posibilidad definidas para los valores cualitativos del dominio de las variables manejadas en el sistema inteligente basado en lógica borrosa con el que se trabaja.

En el caso del ejercicio del cálculo del precio de una carrera de taxi, sección 3.c, es necesario calcular, en primer lugar la \sum_{cuenta} de las funciones de distribución de posibilidad de los valores cualitativos conocidos (barato, normal y caro): $\sum_{\text{cuenta}}(B)$, $\sum_{\text{cuenta}}(N)$ y $\sum_{\text{cuenta}}(C)$; lo cual ya se ha llevado a cabo tomando un punto de discretización cada 10 €:

$$\sum_{\text{cuenta}}(B) = 2; \quad \sum_{\text{cuenta}}(N) = 3; \quad \sum_{\text{cuenta}}(C) = 2,5$$

Posteriormente, se calcula la \sum_{cuenta} de la intersección de estos valores cualitativos conocidos con B' , obtenido como consecuencia del proceso de inferencia llevado a cabo con la regla composicional de inferencia: $\sum_{\text{cuenta}}(B' \wedge B)$, $\sum_{\text{cuenta}}(B' \wedge N)$ y $\sum_{\text{cuenta}}(B' \wedge C)$. La figura 3.9 muestra gráficamente las funciones de distribución de posibilidad resultado de las intersecciones, utilizando la t-norma de Zadeh, $T(\dot{x}, \dot{y}) = \min(\dot{x}, \dot{y}), \forall P$.

De acuerdo con la figura 3.9 y tomado puntos de discretización, de nuevo, cada 10 €:

$$\sum_{\text{cuenta}}(B' \wedge B) = 0,5 + 0,5 = 1$$

$$\sum_{\text{cuenta}}(B' \wedge N) = 0,5 + 0,5 + 0,5 = 1,5$$

$$\sum_{\text{cuenta}}(B' \wedge C) = 0,5 + 1 + 1 = 2,5$$

Por último, se calcula $\sum_{\text{cuenta}}(A_i / B')$, $A_i = \{B, N, C\}$:

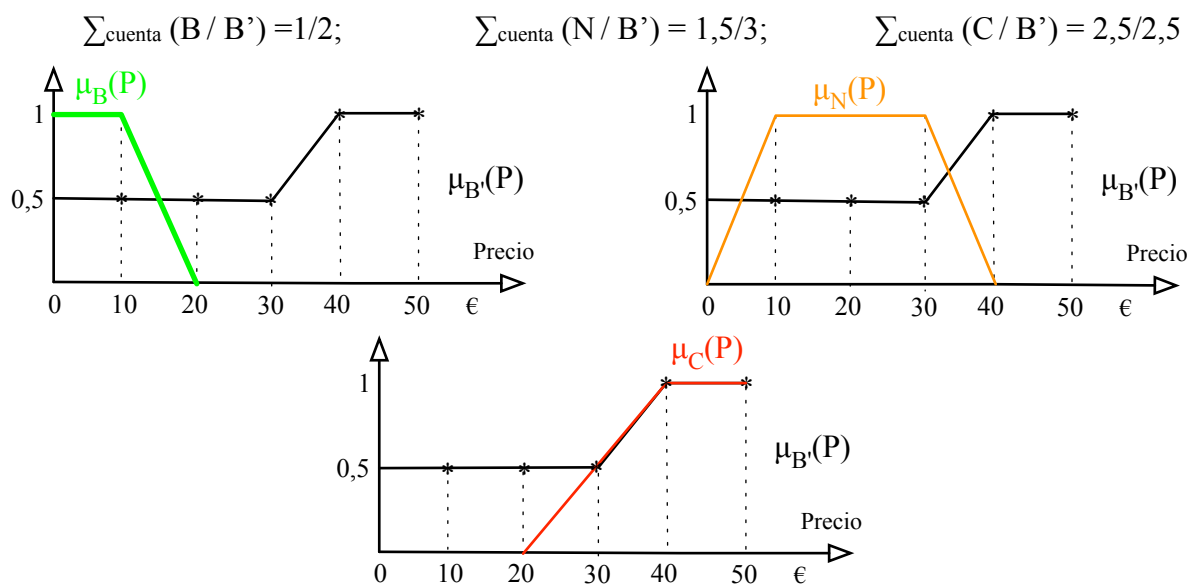


Figura 3.9. Cálculo de $B' \wedge B$, $B' \wedge N$ y $B' \wedge C$ mediante la t-norma de Zadeh.

La función de distribución de posibilidad que maximiza $\sum_{\text{cuenta}} (A_i / B')$ es $\mu_C(P)$, por tanto, $A_i = C$. Es decir, aquél valor cualitativo A_i que maximiza el área de la función de distribución de posibilidad resultado de la intersección entre A_i y B' , independientemente de su propia área A_{A_i} . Por tanto, se considera que la función de distribución de posibilidad de C (caro) es la que más se parece a la distribución de B' , resultado de aplicar el proceso de inferencia (regla composicional de inferencia). Ante la pregunta planteada en el ejemplo del apartado 3.c: ¿cuál será el precio (cualitativo) de la carrera de un taxi si la distancia a recorrer es de alrededor de 30 Km.?; la respuesta es, de acuerdo con el método de la \sum_{cuenta} , que **el taxi será caro**.

Se han aplicado dos métodos diferentes para el cálculo del valor cualitativo del precio de la carrera de un taxi, suponiendo que se desean recorrer alrededor de 30 Km, y se han obtenido dos resultados diferentes. ¿Cuál es entonces el resultado correcto?. La respuesta es, en términos formales, que los dos son correctos. Sería necesario validar estos resultados en el entorno real de trabajo para averiguar cuál de las dos soluciones es más satisfactoria. También es posible modificar los valores de ponderación α y β de la fórmula del cálculo de distancias entre dos funciones de distribución de posibilidad. En ese caso, también se obtendrían, posiblemente, valores cualitativos diferentes, pero todos ellos formalmente correctos. Además de estos parámetros, existen otras decisiones que se deben tomar a la hora de diseñar un sistema inteligente basado en lógica borrosa, como por ejemplo: la distancia entre los puntos de discretización, los operadores t-norma, t-conorma, negación e implicación (siempre que se satisfaga la condición de dualidad), o la forma que adoptan las funciones de distribución de posibilidad que definen los valores cualitativos o conjuntos borroso. Todas estas decisiones influyen en el proceso de inferencia, pudiendo proporcionar resultados diferentes para cada una de ellas, aunque formalmente correctos. El ajuste de estos parámetros (*tunning*, en inglés) se puede llevar a cabo mediante un proceso de validación del sistema inteligente en el entorno real de trabajo.

4. Controladores borrosos

Los controladores borrosos, o difusos, son sistemas inteligentes basados en la representación del conocimiento con imprecisión mediante la lógica borrosa que permiten mantener a un sistema en equilibrio a pesar de las perturbaciones que pueda sufrir. Un controlador borroso emplea una base de conocimiento formada por reglas borrosas para describir el sistema a controlar, a diferencia de los controladores convencionales, que utilizan ecuaciones diferenciales. Los controladores borrosos reciben como entrada un conjunto de variables de estado que describen la situación actual del sistema a controlar y devuelve como salida las acciones a llevar a cabo con el fin de mantener al sistema en su situación de equilibrio. La figura 4.1 muestra de forma esquemática la interacción del controlador borroso con el sistema a controlar.

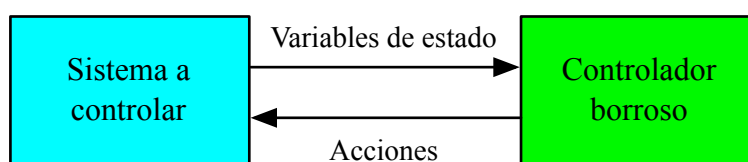


Figura 4.1. Interacción del controlador borroso con el sistema a controlar.

Los controladores borrosos se pueden emplear en múltiples aplicaciones de control o de mantenimiento de sistemas en equilibrio en donde el tiempo de respuesta no es crítico, siendo la facilidad de implementación su principal ventaja. Dos ejemplos de aplicación de los controladores borrosos son los siguientes:

1. **Sistemas de climatización:** en este caso, se desea mantener un recinto, como una vivienda u oficina, a una temperatura constante a pesar de la temperatura exterior (perturbaciones externas al sistema), dado que los sistemas de aislamiento no son perfectos. Si la temperatura exterior es muy elevada, la temperatura del recinto tiende a aumentar, por lo que es necesario que el sistema de climatización produzca frío para mantener la temperatura interior constante. Por el contrario, si la temperatura exterior es muy baja, el sistema de climatización debe producir calor. Por tanto, el controlador borroso se encargaría de gobernar el sistema de climatización. Las variables de estado que llegan al controlador borroso podrían ser en este caso: la temperatura actual del recinto, medida mediante sensores, el desvío o error con respecto a la temperatura de referencia o de control y la variación o tendencia de la temperatura del recinto (aumenta, disminuye o es constante). La respuesta del controlador borroso, su acción, puede venir dada en forma de cambios en el estado del elemento a controlar, como el caudal de gas o niveles de apertura de válvulas.

2. **Sistemas de ventilación:** suponga que se instala un sistema de ventilación forzada en un recinto cerrado, como puede ser un túnel o aparcamiento subterráneo, para mantener el aire limpio a pesar de las perturbaciones que producen el tránsito de vehículos a motor. En este caso, el controlador borroso debe gobernar la potencia de ventilación o extracción de aire (acción) en función de (variables de estado) ciertas medidas de calidad del aire en

un momento dado, desvío con respecto a lo que se considera un aire limpio y la tendencia de la calidad del aire.

Los valores de las variables de estado y acciones a tomar pueden ser etiquetas lingüísticas o conjuntos borrosos definidos mediante sus correspondientes funciones de distribución de posibilidad o funciones de pertenencia. Por tanto, en un controlador borroso es necesario definir, de la misma forma que en un sistema inteligente basado en lógica borrosa general: el conjunto de variables que se manejan, sus dominios de valores numéricos, dominios de valores cualitativos y sus correspondientes funciones de distribución de posibilidad. Así mismo, la base de conocimiento incluye un conjunto de reglas borrosas, las cuales definen, en sus antecedentes, posibles situaciones que se pueden producir en el sistema a controlar; y en los consecuentes, para cada situación descrita, la acción a llevar a cabo para devolver al sistema a controlar a su situación de equilibrio.

Sea s una variable que mide un determinado parámetro del estado de un sistema a controlar (por ejemplo, la temperatura ambiente en el ejemplo del sistema de climatización), e es el error o desvío con respecto a la situación de equilibrio, Δe la variación o tendencia del error y v describe la acción a tomar (por ejemplo, calentar agua a través de una caldera para mantener la temperatura ambiente). Suponiendo que se han definido las funciones de distribución de posibilidad de los valores cualitativos que pueden tomar cada una de estas variables, una base de n reglas de un controlador borroso podría ser la siguiente:

$$R_1: s = A_1 \wedge e = B_1 \wedge \Delta e = C_1 \rightarrow v = D_1$$

...

$$R_i: s = A_i \wedge e = B_i \wedge \Delta e = C_i \rightarrow v = D_i$$

...

$$R_n: s = A_n \wedge e = B_n \wedge \Delta e = C_n \rightarrow v = D_n$$

Donde \wedge y \rightarrow representan, respectivamente, las operaciones de conjunción (intersección) e implicación entre etiquetas lingüísticas o conjuntos borrosos. Nótese cómo las cláusulas de los antecedentes de las reglas de una base de conocimiento de un controlador borroso están siempre unidas mediante conjunciones, lo cual permite simplificar el proceso de inferencia. Cada etiqueta lingüística o conjunto borroso en la base de conocimiento, A_i , B_i , C_i y D_i , $\forall i$, está definida mediante su correspondiente función de distribución de posibilidad, respectivamente, $\mu_{A_i}(s)$, $\mu_{B_i}(e)$, $\mu_{C_i}(\Delta e)$ y $\mu_{D_i}(v)$, $\forall i$. En controladores borrosos es común emplear una notación diferente, aunque equivalente, para expresar las funciones de distribución de posibilidad. En este caso, se utiliza el nombre de la etiqueta lingüística o conjunto borroso para notar la correspondiente función de función de distribución de posibilidad. Así, la función de distribución de posibilidad $\mu_A(x)$, que define a la etiqueta o conjunto borroso A , se nota como $A(x)$.

Dada la definición del conjunto de variables que maneja un controlador borroso, sus dominios de valores numéricos y cualitativos y las funciones de distribución de posibilidad de éstos últimos, una base de n reglas equivalente a la anterior, expresada mediante las

funciones de distribución de posibilidad que definen a las etiquetas lingüísticas o conjuntos borrosos, con la nueva notación sería la siguiente:

$$R_1: A_1(s), B_1(e), C_1(\Delta e) \rightarrow D_1(v)$$

...

$$R_i: A_i(s), B_i(e), C_i(\Delta e) \rightarrow D_i(v)$$

...

$$R_n: A_n(s), B_n(e), C_n(\Delta e) \rightarrow D_n(v)$$

Dado un controlador borroso así definido, el problema de inferencia que se plantea es el siguiente: en un instante dado, las variables de estado del controlador borroso (s , e y Δe) toman los valores $s = A'$, $e = B'$ y $\Delta e = C'$, cuyas funciones de distribución de posibilidad son, respectivamente, $A'(s)$, $B'(e)$ y $C'(\Delta e)$; calcular el valor que debe tomar v , notado como D' , cuya distribución de posibilidad es $D'(v)$, para mantener (o devolver) al sistema de control a su situación de equilibrio.

Este es un problema que se puede resolver mediante la regla composicional de inferencia, que, se recuerda, se enuncia como:

$$\mu_{B'}(y) = \text{Sup}_x \{T(\mu_{A'}(x), \mu_{A \rightarrow B}(x, y))\}$$

En el caso de un controlador borroso:

- La variable y es v . La distribución de posibilidad a calcular, $\mu_{B'}(y)$, expresada como $D'(v)$, es la acción a realizar para mantener al sistema en equilibrio.
- x es un vector tridimensional: s , e y Δe , donde la distribución de posibilidad del hecho $\mu_{A'}(x)$ se calcula mediante la t -norma T (cumple las propiedades asociativa y conmutativa) de las funciones de distribución de posibilidad de los valores que toman las variables de estado en un momento dado: $A'(s)$, $B'(e)$ y $C'(\Delta e)$. El resultado de esta t -norma representa el resultado de la conjunción entre A' , B' y C' ($A' \wedge B' \wedge C'$), que son los valores cualitativos que toman las variables de estado en un momento dado (el hecho que se produce o estado actual del sistema).
- $\mu_{A \rightarrow B}(x, y)$ es $R_i: A_i(s) \wedge B_i(e) \wedge C_i(\Delta e) \rightarrow D_i(v)$, para la regla i -ésima de controlador borroso.

Por tanto, la regla composicional de inferencia aplicada a la regla i -ésima del controlador borroso queda enunciada como:

$$D'_i(v) = \text{Sup}_{s, e, \Delta e} \{T((A'(s) \wedge B'(e) \wedge C'(\Delta e)), (A_i(s) \wedge B_i(e) \wedge C_i(\Delta e) \rightarrow D_i(v)))\}$$

Los controladores borrosos emplean la función t -norma del mínimo: $T(\tilde{x}, \tilde{y}) = \min(\tilde{x}, \tilde{y})$, $\forall x \in \mathcal{X}$, con \tilde{x} , \tilde{y} funciones de distribución de posibilidad; y la función de implicación de Mamdani, definida como: $J(\tilde{x}, \tilde{y}) = \min(\tilde{x}, \tilde{y})$, $\forall x \in \mathcal{X}$. Estas restricciones permiten simplificar la regla composicional de inferencia definida para controladores difusos, ya que tanto las conjunciones como las implicaciones se resuelven mediante la función $\min(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Por tanto, sustituyendo las conjunciones e implicación de la regla composicional de inferencia por la función mín (\hat{x}, \hat{y}), queda la siguiente expresión:

$$D_i'(v) = \text{Sup}_{s,e,\Delta e} \{ \text{mín} ((\text{mín} (\text{mín} (A'(s), B'(e)), C'(\Delta e))), \text{mín} ((\text{mín} (\text{mín} (A_i(s), B_i(e)), C_i(\Delta e)), D_i(v)))) \}$$

Aplicando la propiedad asociativa, se reordenan los términos y queda la siguiente expresión:

$$D_i'(v) = \text{mín} (\text{mín} (\text{mín} (\text{Sup}_s \{ \text{mín} (A'(s), A_i(s)) \}, \text{Sup}_e \{ \text{mín} (B'(e), B_i(e)) \}), \text{Sup}_{\Delta e} \{ \text{mín} (C'(\Delta e), C_i(\Delta e)) \}), D_i(v)).$$

La expresión $\text{Sup}_s \{ \text{mín} (A'(s), A_i(s)) \}$ calcula el valor supremo de posibilidad de la función de distribución de posibilidad que representa a la conjunción entre la etiqueta lingüística A_i , correspondiente a primera cláusula del antecedente de la regla i -ésima; y el hecho, situación que ocurre en un momento dado o estado actual del sistema para esa misma variable s , A' . La figura 4.2 muestra gráficamente cómo calcularlo y el resultado, que es el mayor valor de posibilidad (un número) que alcanza la función de distribución de posibilidad que representa la conjunción entre A' y A_i , cuyas funciones de distribución de posibilidad, $A'(s)$ y $A_i(s)$, están expresadas en función de la misma variable s . Tal y como muestra la figura 4.2, este valor de posibilidad supremo se nota como $NA_{1,i}$: nivel de ajuste de la primera cláusula del antecedente de la regla i -ésima $A_i(s)$ con la función de distribución de posibilidad del hecho $A'(s)$. Si la intersección entre A' y A_i es vacía, entonces $\text{Sup}_s \{ \text{mín} (A'(s), A_i(s)) \} = 0$, por lo que $NA_{1,i} = 0$. Esto significa que la cláusula $A_i(s)$ no ajusta con $A'(s)$, por lo que la regla R_i no se dispara. Por el contrario, si $\text{Sup}_s \{ \text{mín} (A'(s), A_i(s)) \} = 1$, entonces nos encontramos en la situación de un ajuste nítido. Los valores intermedios de $NA_{1,i}$ indican diferentes gradaciones en el ajuste de la cláusula del antecedente de la regla con la distribución de posibilidad de su correspondiente hecho, que es una característica propia de la lógica borrosa.

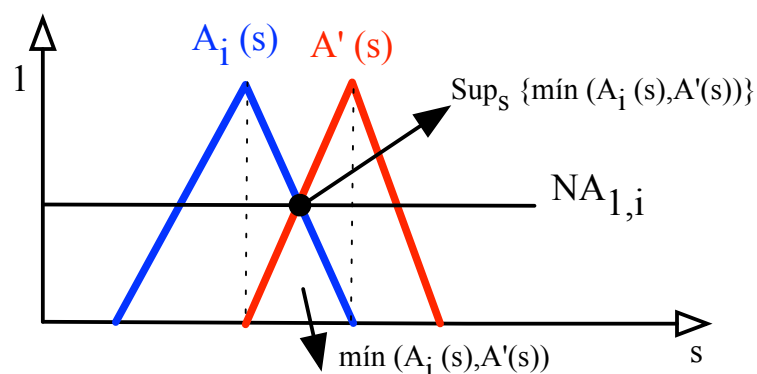


Figura 4.2. Valor supremo de posibilidad de la función de distribución que representa a la conjunción entre A_i y A' .

De la misma manera que $\text{Sup}_s \{ \text{mín} (A'(s), A_i(s)) \} = NA_{1,i}$, se tiene que $\text{Sup}_e \{ \text{mín} (B'(e), B_i(e)) \} = NA_{2,i}$ y $\text{Sup}_{\Delta e} \{ \text{mín} (C'(\Delta e), C_i(\Delta e)) \} = NA_{3,i}$, y así sucesivamente con cuantas cláusulas existan en los antecedentes de las reglas borrosas de la base de conocimiento del controlador. Por tanto:

$$D_i'(v) = \min(\min(\min(NA_{1,i}, NA_{2,i}), NA_{3,i}), D_i(v)).$$

$\min(\min(NA_{1,i}, NA_{2,i}), NA_{3,i}) = NA_i$, que es el nivel de ajuste total del antecedente de la regla i -ésima con el estado actual del sistema, o nivel de ajuste de la regla i -ésima. Resulta lógico pensar que si los valores cualitativos de las cláusulas de los antecedentes de las reglas de la base de conocimiento del controlador borroso están unidas mediante conjunciones, el nivel de ajuste total del antecedente de la regla sea el mínimo de los niveles de ajuste de sus correspondientes cláusulas. Por esa razón, si alguna cláusula j del antecedente de una regla i no ajusta con su correspondiente hecho (el que depende de la misma variable) y, por tanto, su nivel de ajuste $N_{ji} = 0$, la regla R_i no se dispara: su nivel de ajuste es cero: $NA_i = 0$.

- La expresión para el cálculo de la función de distribución de posibilidad del consecuente según la regla i -ésima, $D_i'(v)$, que se correspondería con $\mu_{B_i'}(y)$ en la regla composicional de inferencia, queda como:

$$D_i'(v) = \min(NA_i, D_i(v))$$

Donde NA_i se debe interpretar como una función de distribución de posibilidad que devuelve el valor NA_i para todo el dominio; \min es, en realidad, la función t-norma del mínimo y $D_i(v)$ es el consecuente de la regla i -ésima (distribución de posibilidad). La figura 4.3 muestra gráficamente este cálculo.

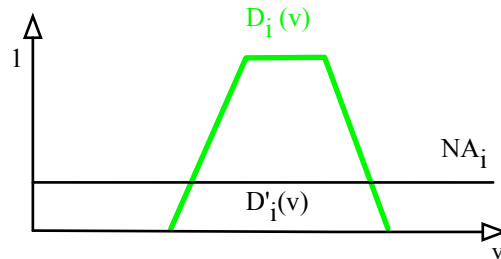


Figura 4.3. Cálculo del consecuente $D_i'(v)$ según la regla i -ésima a partir del cálculo de su nivel de ajuste NA_i .

- Siguiendo el procedimiento anterior de inferencia en controladores borrosos, para cada una de las reglas R_i de la base de conocimiento del controlador borroso, se obtiene una función de distribución de posibilidad del consecuente que depende de la variable v : $\{D_1'(v), \dots, D_i'(v), \dots, D_n'(v)\}$. Por tanto, es necesario calcular la función de distribución de posibilidad final $D'(v)$, correspondiente a $\mu_{B'}(y)$ en la regla composicional de inferencia. Para ello, se calcula la t-conorma S (cumple las propiedades asociativa y conmutativa) de las funciones de distribución de posibilidad $D_i'(v) \forall i$. El resultado de esta t-conorma representa el resultado de la disyunción (unión) entre $D_1', \dots, D_i', \dots, D_n'$, es decir: $D' = \cup_i (D_i'), \forall i$; que son los valores cualitativos, desconocidos (no tienen una etiqueta lingüística definida) por no estar declarados en el controlador borroso, correspondientes a las funciones de distribución de posibilidad obtenidas como resultado de la aplicación de los pasos anteriores.

Los controladores borrosos emplean la función t-conorma del máximo: $S(\dot{x}, \dot{y}) = \max(\dot{x}, \dot{y}), \forall x \in \mathcal{X}$, con \dot{x}, \dot{y} funciones de distribución de posibilidad expresadas en función de la

misma variable x , que es dual a $T(\hat{x}, \hat{y}) = \min(\hat{x}, \hat{y})$ con respecto a la negación $N(\hat{x}) = 1 - \hat{x}$, con $1 \equiv \mu_1(x) = 1, \forall x \in \mathcal{X}$.

La figura 4.4 muestra el cálculo de la función de distribución de posibilidad $D'(v)$ a partir de dos distribuciones de posibilidad $D_i'(v)$ y $D_j'(v)$, obtenidas como consecuencia del proceso de inferencia en controladores borrosos, suponiendo que únicamente se disparan las reglas R_i y R_j . Esto es, que el nivel de ajuste de las reglas de la base de conocimiento del controlador es cero, excepto para R_i y R_j , cuyos valores son NA_i y NA_j , respectivamente.

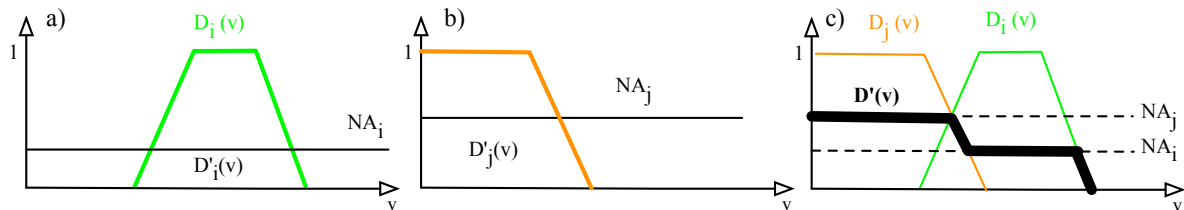


Figura 4.4. Cálculo de $D'(v)$, en c), a partir de $D_i'(v)$, en a), y $D_j'(v)$ en b).

Una vez calculada la función de distribución de posibilidad $D'(v)$, resultado del proceso de inferencia con controladores borrosos, es necesario llevar a cabo la interpretación, conversión o *desborrocificación* de esta distribución de posibilidad. Tanto $D'(v)$ como su valor cualitativo asociado D' son, en general, desconocidos porque no están definidos en el controlador borroso. Para llevar a cabo el proceso de interpretación de $D'(v)$ se pueden emplear cualquiera de las tres técnicas vistas anteriormente, según se desee una conversión de $D'(v)$ a un valor nítido o a una etiqueta lingüística de entre las pertenecientes al dominio de v . En el primer caso, se calcula el centro de gravedad de $D'(v)$, gd' , y en el segundo, se puede optar por el método de la distancia o la \sum_{cuenta} .

Generalmente, cuando el receptor de la salida proporcionada por un controlador borroso es una persona, como es el caso de los sistemas de ayuda a la decisión, la presentación de resultados, alarmas o información en pantalla, suele ser conveniente realizar el proceso de interpretación de $D'(v)$ como una etiqueta lingüística. Las personas somos muy hábiles en el manejo del conocimiento con imprecisión y nos proporciona una información más útil el uso de etiquetas lingüísticas en lugar de valores nítidos precisos. Por ejemplo, en el caso de un sistema de calefacción mediante radiadores, resulta más útil para una persona que el controlador borroso informe, mediante la pantalla del termostato, que el agua que circula por los radiadores está “muy caliente” (etiqueta lingüística definida mediante su correspondiente función de distribución de posibilidad) o, incluso muestre una señal de alerta, para saber que no hay que tocar los radiadores por riesgo de quemaduras. Esta etiqueta lingüística, obtenida por el método de la distancia o \sum_{cuenta} , proporciona más información (a pesar de ser imprecisa) que saber el valor nítido exacto; por ejemplo, que la temperatura del agua está a $63,5^\circ\text{C}$ (a partir del cálculo del centro de gravedad). En este último caso, podríamos no saber, o dudar, acerca de si los radiadores están calientes.

Por el contrario, cuando el controlador borroso se comunica con un dispositivo electrónico, generalmente resulta más conveniente proporcionar valores nítidos. Continuando con el

ejemplo del sistema de calefacción, resulta del todo inapropiado que el controlador borroso indique a la caldera que el agua que circula por los radiadores debe estar “muy caliente” porque, seguramente, la caldera no sabrá interpretar este resultado. Por el contrario, indicar a la caldera que el agua que circula por los radiadores debe estar a 63,5 °C es una acción que debería poder implementar.

a. Procedimiento general de inferencia en controladores

Para mantener a un sistema en equilibrio, se formula un modelo de control borroso o difuso de forma que en cada momento, se determine el valor que debe tomar una variable v . Por tanto, el controlador difuso debe actuar sobre la variable v , la cual viene determinada en función de las variables de estado s , e y Δe . Para cada una de estas variables, se define su significado, dominio de valores numérico y conjunto de valores cualitativos. En este último caso, se tiene que $s = \{A_1, \dots, A_i, \dots, A_n\}$, $e = \{B_1, \dots, B_i, \dots, B_n\}$, $\Delta e = \{C_1, \dots, C_i, \dots, C_n\}$ y $v = \{D_1, \dots, D_i, \dots, D_n\}$, con posibles repeticiones en todos los casos, es decir, el cardinal de estos conjuntos no tiene porqué ser n . Así mismo, para cada valor cualitativo del dominio de cada una de las variables, se definen sus correspondientes funciones de distribución de posibilidad: $A_1(s), \dots, A_i(s), \dots, A_n(s)$; $B_1(e), \dots, B_i(e), \dots, B_n(e)$; $C_1(\Delta e), \dots, C_i(\Delta e), \dots, C_n(\Delta e)$; y $D_1(v), \dots, D_i(v), \dots, D_n(v)$.

Se dispone de la siguiente base de conocimiento en cualquiera de sus dos notaciones:

$R_1: A_1(s), B_1(e), C_1(\Delta e) \rightarrow D_1(v);$	$R_1: s = A_1, e = B_1, \Delta e = C_1 \rightarrow v = D_1$
...	...
$R_i: A_i(s), B_i(e), C_i(\Delta e) \rightarrow D_i(v);$	$R_i: s = A_i, e = B_i, \Delta e = C_i \rightarrow v = D_i$
...	...
$R_n: A_n(s), B_n(e), C_n(\Delta e) \rightarrow D_n(v);$	$R_n: s = A_n, e = B_n, \Delta e = C_n \rightarrow v = D_n$

En un momento dado, se sabe que el estado actual del sistema (hecho) es: $s = A'$, $e = B'$ y $\Delta e = C'$. Calcular el valor que debe tomar v para mantener al sistema en equilibrio.

Para poder calcular el valor que debe tomar v para mantener al sistema en equilibrio es necesario aplicar el procedimiento de inferencia en controladores difusos, el cual es un caso particular de la regla composicional de inferencia en donde $T(\dot{x}, \dot{y}) = \min(\dot{x}, \dot{y})$; $S(\dot{x}, \dot{y}) = \max(\dot{x}, \dot{y})$, $N(\dot{x}) = 1 - \dot{x}$ y $J(\dot{x}, \dot{y}) = \min(\dot{x}, \dot{y})$; $\forall x \in \mathcal{X}$, con \dot{x}, \dot{y} funciones de distribución de posibilidad expresadas en función de la misma variable x y $1 \equiv \mu_1(x) = 1 \forall x \in \mathcal{X}$. Así mismo, las cláusulas de los antecedentes de las reglas están unidas mediante conjunciones (uniones), que se calculan mediante la t-norma de las correspondientes funciones de distribución de posibilidad.

Este procedimiento general se resumen en los siguientes pasos:

1. Cálculo del nivel de ajuste de cada regla NA_i .

$NA_i = \min \{ \text{Sup}_s [T (A_i(s), A'(s))], \min (\text{Sup}_e [T (B_i(e), B'(e))], \text{Sup}_{\Delta e} [T (C_i(\Delta e), C'(\Delta e))]) \}$, siendo T la t-norma $T(\hat{x}, \hat{y}) = \min (\hat{x}, \hat{y})$.

Para cada regla R_i , se calcula la t-norma de las funciones de distribución de posibilidad correspondientes a las etiquetas lingüísticas de cada una cláusulas del antecedente de la regla (A_i , B_i y C_i , en este caso) con las funciones de distribución de posibilidad correspondientes a las etiquetas lingüísticas del estado actual del sistema (A' , B' y C'). Evidentemente, estas operaciones t-norma se aplican entre funciones de distribución de posibilidad dependientes de la misma variable: $T (A_i(s), A'(s))$, $T (B_i(e), B'(e))$ y $T (C_i(\Delta e), C'(\Delta e))$. Cada una de estas operaciones devuelve como resultado otra función de distribución de posibilidad que representa la conjunción o intersección entre las correspondientes etiquetas lingüísticas: $A_i \wedge A'$, $B_i \wedge B'$ y $C_i \wedge C'$. Posteriormente, se calcula el valor supremo de posibilidad de cada una de las distribuciones de posibilidad obtenidas como resultado del cálculo de la t-norma. Finalmente, el nivel de ajuste de la regla R_i es el mínimo de los supremos calculados anteriormente.

A efectos prácticos, en lugar de calcular los niveles de ajuste de todas las reglas de la base de conocimiento del controlador borroso, es posible realizar una simplificación, calculando únicamente los niveles de ajuste de aquellas reglas de la base de conocimiento que se disparan porque su nivel de ajuste es mayor que cero: $NA_i > 0$. Dado que las etiquetas lingüísticas de las cláusulas de los antecedentes de las reglas están unidas mediante conjunciones, en cuanto se observe, a través de las correspondientes distribuciones de posibilidad, que la intersección entre cualquier etiqueta lingüística del antecedente de una regla con la etiqueta del hecho correspondiente (aquellas cuyas funciones de distribución de posibilidad dependen de las misma variable) es vacía, la regla no se dispara. Es decir, que si se cumple que $T (A_i(s), A'(s)) = 0$ ó $T (B_i(e), B'(e)) = 0$ ó $T (C_i(\Delta e), C'(\Delta e)) = 0$, con $0 \equiv \mu_0(x) = 0 \forall x \in \mathcal{X}$; entonces la regla R_i no se dispara, siendo $NA_i = 0$.

2. Cálculo de los consecuentes de las reglas que se disparan, $NA_i > 0$.

Para cada una de las reglas R_i cuyo $NA_i > 0$, se calcula la función de distribución de posibilidad del consecuente de la regla $D_i'(v)$ como:

$$D_i'(v) = \min (NA_i, D_i(v))$$

Donde NA_i se debe interpretar como una función de distribución de posibilidad que devuelve el valor NA_i para todo el dominio; mín es, en realidad, la función t-norma del mínimo y $D_i(v)$ es el consecuente de la regla i -ésima (distribución de posibilidad).

3. Cálculo de la función de distribución de posibilidad resultado del proceso de inferencia.

La función de distribución final del proceso de inferencia $D'(v)$ se calcula mediante la t-norma (cumple las propiedades asociativa y conmutativa) de las funciones de distribución de posibilidad $D_i'(v)$ obtenidas en el paso anterior:

$$D'(v) = T(D_1'(v), T(D_2'(v), \dots, T(D_i'(v), \dots D_n'(v)) \dots)$$

Utilizando la notación en base a etiquetas lingüísticas $D' =$ El resultado es una función de distribución de posibilidad cuya etiqueta lingüística $D' = \cup_i (D'_i), \forall i$.

4. Interpretación del resultado final.

Generalmente, tanto D' como su correspondiente función de distribución de posibilidad $D'(v)$ son desconocidas por no estar definidas en el controlador borroso. Por tanto, es necesario llevar a cabo un proceso de interpretación o conversión de $D'(v)$ a un número, mediante el cálculo de su centro de gravedad, o a una etiqueta lingüística definida en el controlador borroso ($D_1, \dots, D_i, \dots, D_n$), mediante los métodos de la distancia o \sum_{cuenta} .

Para el cálculo del **centro de gravedad** de $D'(v)$, se eligen, en primer lugar, puntos de discretización $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ a intervalos regulares. Posteriormente, se calcula el centro de gravedad $g_{D'}$ como:

$$g_{D'} = \frac{\sum_{j=1}^m v_j \cdot D'(v_j)}{\sum_{j=1}^m D'(v_j)}$$

Para el cálculo de la etiqueta lingüística D_i cuya función de distribución de posibilidad se *parece* más $D'(v)$ mediante el **método de la distancia**, se calculan las distancias de $D'(v)$ a cada una de las distribuciones $D_1(v), \dots, D_i(v), \dots, D_n(v)$ conocidas mediante la siguiente fórmula:

$$d(D'(v), D_i(v)) = \sqrt{\alpha \cdot (g_{D'} - g_{D_i})^2 + \beta \cdot (A_{D'} - A_{D_i})^2}$$

Siendo α y β valores de ponderación, $\alpha + \beta = 1$ y $\alpha, \beta \in [0, 1]$; $g_{D'}$, g_{D_i} los centros de gravedad y $A_{D'}$, A_{D_i} las áreas de $D'(v)$ y $D_i(v)$, respectivamente, aquella D_i cuya función de distribución de posibilidad, $D_i(v)$, que minimiza $d(D'(v), D_i(v))$ es la etiqueta lingüística que se devuelve como resultado: $D_i / \forall j = 1..n, d(D'(v), D_i(v)) \leq d(D'(v), D_j(v))$

Por último, para el cálculo de la etiqueta lingüística D_i cuya función de distribución de posibilidad se *parece* más $D'(v)$ mediante el método de la \sum_{cuenta} , se calcula, para cada una de las distribuciones $D_1(v), \dots, D_i(v), \dots, D_n(v)$ conocidas :

$$\sum_{\text{cuenta}} (A_i / B') = \frac{\sum_{\text{cuenta}} (B' \wedge A_i)}{\sum_{\text{cuenta}} (A_i)}$$

Aquella D_i cuya distribución de posibilidad $D_i(v)$ maximiza $\sum_{\text{cuenta}} (D_i / D')$ es la etiqueta lingüística que se devuelve como resultado: $D_i / \forall j = 1..n, \sum_{\text{cuenta}} (D_i / D') \geq \sum_{\text{cuenta}} (D_j / D')$.

A lo largo de todo el desarrollo del proceso de inferencia en controladores borrosos, se ha supuesto que las reglas de la base de conocimiento tienen tres cláusulas, dependientes de las variables s , e y Δe . Evidentemente, pueden tener cualquier número de cláusulas, variando únicamente el número de términos que intervienen en el cálculo de los niveles de ajuste de las reglas: $NA_i = \min \{ \text{Sup}_s [T(A_i(s), A'(s))], \min (\text{Sup}_e [T(B_i(e), B'(e))], \text{Sup}_{\Delta e} [T(C_i(\Delta e), C'(\Delta e))]) \}$. Un caso particular se produce cuando alguna de las reglas (R_i) tiene una única cláusula, por ejemplo, dependiente de la variable s . En este caso, el nivel de ajuste es el valor supremo de la función de distribución de posibilidad resultante de aplicar la t-norma entre la función de posibilidad $A_i(s)$ y la correspondiente al hecho que depende de la misma variable $A'(s)$. Por tanto, $NA_i = \text{Sup}_s [T(A_i(s), A'(s))]$.

b. Ejemplo de inferencia en controladores

Para controlar el sistema de calefacción de una vivienda, se ha diseñado un modelo de control borroso, de forma que, en cada momento, se determine cuál debe ser la temperatura del agua que circula por los radiadores con el fin de mantener el ambiente a la temperatura deseada por el usuario.

El sistema de calefacción consta de los siguientes componentes: Un termostato electrónico. Este es el aparato donde va empotrado el sistema de control borroso para controlar la temperatura ambiente. El termostato posee un reloj y un programador que permite al usuario establecer diferentes temperaturas ambiente a lo largo del día. Una caldera de gas, encargada de calentar el agua que circula por los radiadores bajo mandato del termostato. Los radiadores, distribuidos por la vivienda. Finalmente, los sensores de temperatura, conectados al termostato para indicar la temperatura ambiente actual.

El controlador difuso debe actuar sobre la variable Temperatura del Agua que circula por los radiadores (TA) para controlar la temperatura ambiente. Esta variable viene determinada en función de la Diferencia entre la Temperatura ambiente actual y la Temperatura definida por el usuario en el termostato (DT), la variación de esta diferencia de temperaturas (dDT) y la Hora actual (H), tomada del reloj del termostato. Por tanto, se manejan las siguientes variables:

- TA: Temperatura del Agua que circula por los radiadores, con valores posibles: Fría (F), Templada (T), Caliente (C) y Muy Caliente (MC). Su intervalo de valores es $(0,100)^\circ\text{C}$.
- DT: Diferencia de Temperaturas entre la que existe actualmente en el ambiente y la definida por el usuario en el termostato, con posibles valores: Por Debajo (PD), Exacto (E) y Por Encima (PE). Su intervalo de valores $[-50,50]^\circ\text{C}$. Los valores negativos indican que la temperatura ambiente está por debajo de la deseada por el usuario, mientras que los valores positivos indican que la temperatura ambiente está por encima de la deseada por el usuario.

- dDT: Variación de la Diferencia de Temperaturas, medido en grados centígrados por hora ($^{\circ}\text{C/h.}$), con valores posibles: Negativa (N), cero (Z) y Positiva (P). Su intervalo de valores es $[-5,5]^{\circ}\text{C/h.}$
- H: la Hora actual, con posibles valores: Mañana (Ma), Tarde (Ta), Noche (No) y Madrugada (M). Su intervalo de valores es $[0,24)$ horas.

Los valores cualitativos que pueden tomar las variables que maneja el controlador borroso tienen asociadas las funciones de posibilidad mostradas en la figura 4.5:

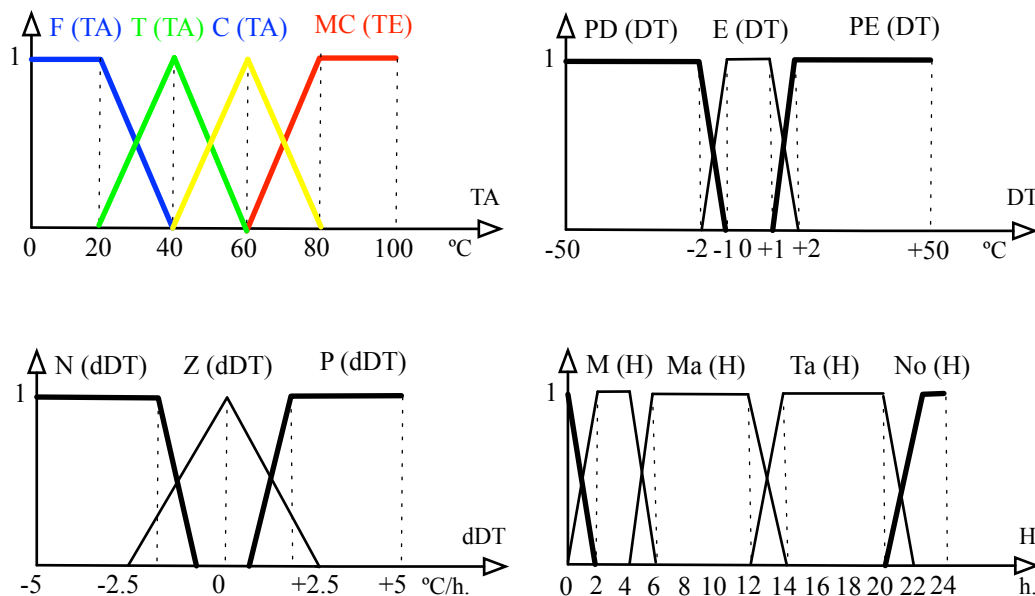


Figura 4.5. Funciones de distribución de posibilidad asociadas a los valores cualitativos de TA, DT, dDT y H.

Para relacionar las variables, se dispone de la siguiente base de reglas:

Regla	DT	dDT	H	→	TA
R1	--	--	Ma		F
R2	PE	Z	No		F
R3	E	P	No		F
R4	PE	N	Ta		T

Se pide aplicar el modelo de razonamiento en controladores borrosos para obtener el valor numérico (para enviar a la caldera) y cualitativo (para mostrar en la pantalla del termostato) de TA (temperatura del agua) que debe circular por los radiadores, sabiendo que es por la mañana (Ma), que la diferencia de temperaturas es de $+2^{\circ}\text{C}$ y que la variación de la diferencia de temperaturas es de $-2,5^{\circ}\text{C}$.

SOLUCIÓN:

1. Cálculo del nivel de ajuste de cada regla NA_i .

En primer lugar es necesario calcular el nivel de ajuste NA_i del estado actual del sistema con el antecedente de cada una de las reglas R_i que forman la base de conocimiento del controlador borroso. En lugar de calcular los niveles de ajuste de todas las reglas de la base

de conocimiento del controlador borroso, es posible realizar una simplificación, consistente en calcular únicamente aquellos $NA_i > 0$. Para ello, es necesario conocer, a través de las correspondientes distribuciones de posibilidad, que la intersección entre cualquier etiqueta lingüística del antecedente de una regla con la etiqueta del hecho correspondiente (aquellas cuyas funciones de distribución de posibilidad dependen de las misma variable) no es vacía. Por tanto, se calcula a continuación con qué etiquetas lingüísticas (conjuntos borrosos) hay intersección no vacía con aquellas que definen el estado actual del sistema de calefacción, así como el nivel de ajuste entre sus correspondientes funciones de distribución de posibilidad.

Se dice en el enunciado que el estado actual del sistema se describe de la siguiente forma: $H = Ma$; $DT = +2$ y $dDT = -2,5$. Se sobreentiende que la función de distribución de posibilidad correspondiente a $DT = +2$ es $\mu_{+2}(DT = +2) = 1$; 0 en el resto. De forma similar para $dDT = -2,5$: $\mu_{-2,5}(dDT = -2,5) = 1$; 0 en el resto.

- $H = Ma$ tiene intersección no vacía con madrugada (Ma), Mañana (M) y Tarde (T). Se calculan entonces los supremos de las t-normas de las distribuciones de posibilidad correspondientes al hecho Ma con Ma, M y T (niveles de ajuste): $\text{Sup}_H[T(Ma(H), Ma(H))] = 1$; $\text{Sup}_H[T(Ma(H), M(H))] = 0,5$; $\text{Sup}_H[T(Ma(H), T(H))] = 0,5$. La figura 4.6 muestra estos cálculos de forma gráfica

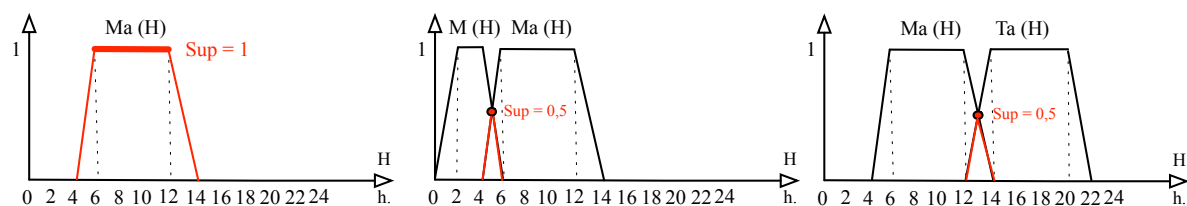


Figura 4.6. Cálculo de los niveles de ajuste entre las distribuciones de posibilidad correspondientes al hecho $H = Ma$ y a aquellas con cuyas etiquetas lingüísticas existe una intersección no vacía: Ma, M y T.

- $DT = +2$ tiene intersección no vacía con Por Encima (PE): $\text{Sup}_{DT}[T(+2(DT), PE(DT))] = 1$. La figura 4.7 muestra este cálculo de forma gráfica.

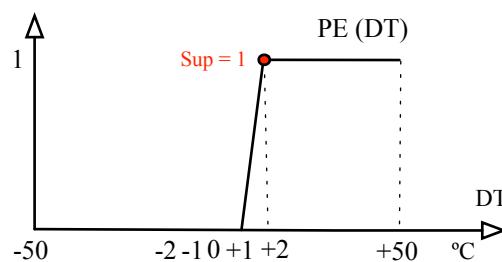


Figura 4.7. Cálculo del nivel de ajuste entre +2 (DT) y PE (DT).

- $dDT = -2,5$ tiene intersección no vacía con Negativa (N): $\text{Sup}_{dDT}[T(-2,5(dDT), N(dDT))] = 1$. La figura 4.8 muestra este cálculo de forma gráfica.

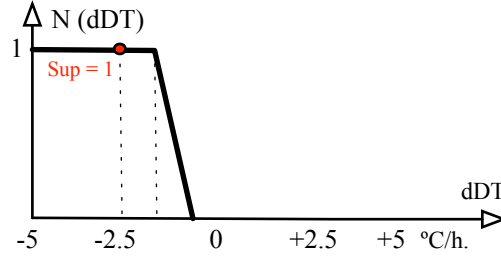


Figura 4.8. Cálculo del nivel de ajuste entre -2,5 (dDT) y N (dDT).

Por tanto, sólo se disparan aquellas reglas que tengan en sus antecedentes Ma, M o T para la variable H; PE para la variable DT y N para dDT; esto es:

R1: DT = -, dDT = -, H = Ma \rightarrow TA = F;

R4: DT = PE, dDT = N, H = Ta \rightarrow TA = T;

Dado que R1 sólo tiene una cláusula en el antecedente, H = Ma, el nivel de ajuste de la regla es el nivel de ajuste de su única cláusula con el hecho: $NA_1 = NA_{11}$; siendo $NA_{11} = \text{Sup}_H[T(Ma(H), Ma(H))] = 1$. Por tanto, $NA_1 = 1$.

En el caso de R4, con tres cláusulas en el antecedente, $NA_4 = \min(NA_{14}, NA_{24}, NA_{34})$, donde $NA_{14} = \text{Sup}_{DT}[T(+2(DT), PE(DT))] = 1$; $NA_{24} = \text{Sup}_{dDT}[T(-2,5(dDT), N(dDT))] = 1$; y $NA_{34} = \text{Sup}_H[T(Ma(H), T(H))] = 0,5$. Por tanto, $NA_4 = 0,5$.

2. Cálculo de los consecuentes de las reglas que se disparan: R₁ y R₄.

La fórmula general del cálculo de la función de distribución de posibilidad del consecuente de una regla en un controlador borroso es la siguiente:

$$D_i'(v) = \min(NA_i, D_i(v))$$

Donde NA_i se debe interpretar como una función de distribución de posibilidad que devuelve el valor NA_i para todo el dominio; \min es, en realidad, la función t-norma del mínimo y $D_i(v)$ es el consecuente de la regla i-ésima (distribución de posibilidad).

En el caso de este ejercicio, es necesario calcular $D_1'(TA)$ y $D_4'(TA)$, con $D_1'(TA) = \min(NA_1, F(TA))$; y $D_4'(TA) = \min(NA_4, T(TA))$. Dado que $NA_1 = 1$, interpretado como $\mu_1(x) = 1 \forall x \in \mathcal{X}$, es el elemento neutro de la t-norma, en este caso la t-norma del mínimo, se tiene que $D_1'(TA) = F(TA)$, la cual se muestra en la figura 4.5 en color azul. La figura 4.9 muestra gráficamente el cálculo de la función de distribución de posibilidad $D_4'(TA)$.

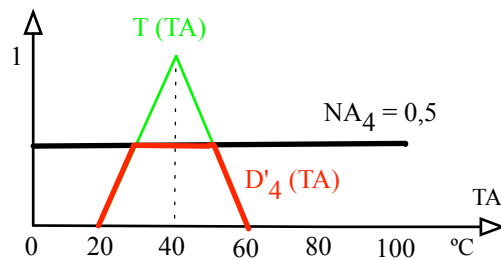


Figura 4.9. Cálculo de la función de distribución de posibilidad $D_4'(TA)$.

3. Cálculo de la función de distribución de posibilidad resultado del proceso de inferencia.

La función de distribución final, $D'(TA)$, se calcula mediante la t-conorma del máximo de las funciones de posibilidad $D_1'(TA)$ y $D_4'(TA)$: $D'(TA) = S(D_1'(TA) \text{ y } D_4'(TA))$. La figura 4.10 muestra gráficamente el cálculo de $D'(TA)$.

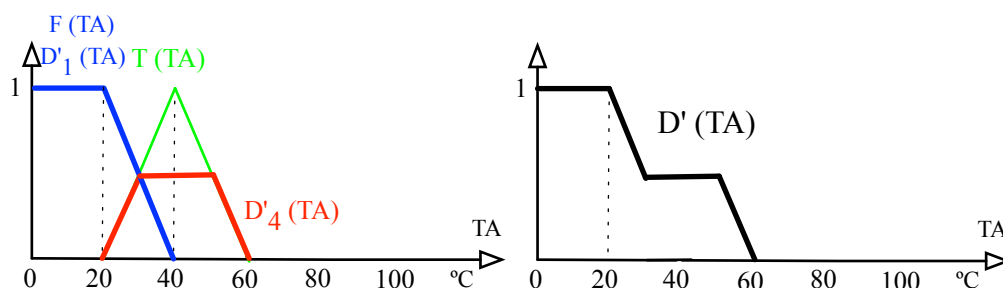


Figura 4.10. Cálculo de la función de distribución de posibilidad $D'(TA)$.

4. Interpretación del resultado final: $D'(TA)$.

Dado que la función de distribución de posibilidad $D'(TA)$ no está definida en el sistema de control borroso propuesto en el enunciado de este ejercicio, es necesario llevar a cabo un proceso de interpretación o conversión de $D'(TA)$. En este caso, se solicita tanto el valor numérico (para enviarlo a la caldera del sistema de calefacción), como la etiqueta lingüística, para mostrarla en la pantalla del termostato.

El valor numérico de TA para enviarlo a la caldera y que, de esa forma, el sistema a controlar vuelva a su estado de equilibrio, se lleva a cabo mediante el cálculo del centro de gravedad de $D'(TA)$, tomando los puntos de discretización TA_i a intervalos de 10°C:

$$g_{D'} = \frac{\sum_{i=1}^n TA_i \cdot D'(TA_i)}{\sum_{i=1}^n D'(TA_i)} = \frac{10 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 30 \cdot 0,5 + 40 \cdot 0,5 + 50 \cdot 0,5}{1 + 1 + 0,5 + 0,5 + 0,5} = 25,71$$

Por tanto, es necesario enviar a la caldera una orden de calentar el agua que circula por los radiadores a 25,71°C para devolver el sistema de calefacción a su estado de equilibrio.

El valor cualitativo o etiqueta lingüística de las definidas en el controlador borroso cuya función de distribución de posibilidad se *parece* más a $D'(TA)$, con el fin de enviarlo a la pantalla del termostato como información al usuario, se calcula mediante la \sum_{cuenta} .

Las etiquetas lingüísticas conocidas, con las que hay que comparar D' , son F, T, C y MC, cuyas funciones de distribución de posibilidad se muestran en la figura 4.5. En primer lugar es necesario calcular la \sum_{cuenta} de estas funciones de distribución de posibilidad, para lo que se toman puntos de discretización a intervalos de 10 °C:

- $\sum_{\text{cuenta}} (F) = 1 + 1 + 0,5 = 2,5$. $\sum_{\text{cuenta}} (T) = 0,5 + 1 + 0,5 = 2$.
- $\sum_{\text{cuenta}} (C) = 0,5 + 1 + 0,5 = 2$. $\sum_{\text{cuenta}} (MC) = 0,5 + 1 + 1 = 2,5$.

Posteriormente, utilizando los mismos puntos de discretización, se calculan las \sum_{cuenta} de las funciones de distribución de posibilidad que representan la intersección entre cada una de las etiquetas lingüísticas conocidas (F, T, C, MC) con la obtenida tras el proceso de inferencia en controladores borrosos, D' . La figura 4.11 muestra gráficamente las funciones de distribución de posibilidad que representan el resultado de estas intersecciones.

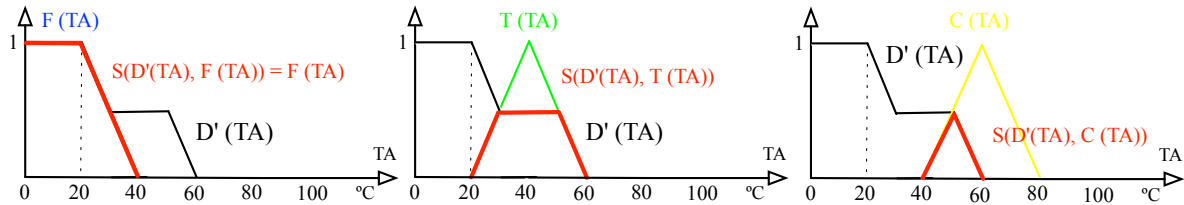


Figura 4.11. Funciones de distribución de posibilidad que representan el resultado de la intersección de D' con F, T, C y MC.

- $\sum_{\text{cuenta}} (D' \wedge F) = 1 + 1 + 0,5 = 2,5$.
- $\sum_{\text{cuenta}} (D' \wedge T) = 0,5 + 0,5 + 0,5 = 1,5$.
- $\sum_{\text{cuenta}} (D' \wedge C) = 0,5$.
- $\sum_{\text{cuenta}} (D' \wedge MC) = 0$, dado que la intersección entre D' y MC es vacía.

Por último, se calcula la $\sum_{\text{cuenta}} (F / D')$, $\sum_{\text{cuenta}} (T / D')$, $\sum_{\text{cuenta}} (C / D')$ y $\sum_{\text{cuenta}} (MC / D')$ como:

$$\sum_{\text{cuenta}} (A_i / D') = \frac{\sum_{\text{cuenta}} (D' \wedge A_i)}{\sum_{\text{cuenta}} A_i}$$

Donde A_i representa a F, T, C y MC, las etiquetas lingüísticas cuyas funciones de distribución de posibilidad conocidas, definidas en la figura 4.5.

- $\sum_{\text{cuenta}} (F / D') = 2,5 / 2,5 = 1$
- $\sum_{\text{cuenta}} (T / D') = 1,5 / 2$
- $\sum_{\text{cuenta}} (C / D') = 0,5 / 2$
- $\sum_{\text{cuenta}} (MC / D') = 0$

La etiqueta lingüística A_i que maximiza $\sum_{\text{cuenta}} (A_i / D')$ es F, por tanto la pantalla del termostato del sistema de calefacción debe indicar que el agua que circula por los radiadores está fría.

Bibliografía

(Buchanan, 1984) B. G. Buchanan & E.H. Shortliffe, eds. Rule-Based Expert Systems. Vol. 3, Ch. 11 A model of Inexact Reasoning in Medicine, pp. 233-262. Ed. Addison Wesley, MA, 1984.

(Cuenca, 1997) J. Cuenca. Sistemas Inteligentes. Conceptos, técnicas y métodos de construcción. Facultad de Informática – Servicio de Publicaciones. Fundación General de la UPM. Madrid, 1997.

(Klir, 1995) G. J. Klir & B. Yuan. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications. Prentice Hall PTR. New Jersey, 1995.

(Mamdani, 1977) E. H. Mamdani. *Applications of Fuzzy Set Theory to Control Systems: A Survey*, in Fuzzy Automata and Decision Processes, M. M. Gupta, G. N. Saridis and B. R. Gaines, eds., North-Holland, New York, 1977.

(Wikipedia, 2015) <http://es.wikipedia.org/wiki/Probabilidad>. Accedido en Feb. 2015.

(WordReference, 2015) <http://www.wordreference.com/definicion/posibilidad>. Accedido en Feb. 2015.